

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

## **SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM ATENUADOR DE IMPACTO EM FIBRA DE CARBONO**

José Carlos Afonso Cuginotti Filho

Brasil  
2017

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

## **SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM ATENUADOR DE IMPACTO EM FIBRA DE CARBONO**

Trabalho de formatura apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Graduação em Engenharia Mecânica

José Carlos Afonso Cuginotti Filho

Orientador: Marcelo Augusto Leal Alves

Área de Concentração:  
Engenharia Mecânica

Brasil  
2017

## Catalogação-na-publicação

Cuginotti Filho, José Carlos Afonso  
Análise numérica de um atenuador de impacto em fibra de carbono / J.  
C. A. Cuginotti Filho -- São Paulo, 2017.  
81 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São  
Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Análise numérica 2.Atenuador de Impacto 3.Elementos Finitos  
4.Fibra de Carbono 5.Fórmula SAE I.Universidade de São Paulo. Escola  
Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à minha família, em especial, minha mãe *Isabela*, meu pai, *José Carlos*, e minha irmã *Ana Leticia*, eles são responsáveis diretos por essa conquista, e sem esse amparo e suporte seria difícil completar essa importante fase.

Em seguida, gostaria de destacar o papel dos meus amigos, em especial, os companheiros de Poli Racing que me ajudaram a superar os desafios acadêmicos e contribuíram de forma relevante à minha formação profissional. Deixo aqui um agradecimento especial ao professor *Marcelo Alves* que sempre acreditou, apoiou e motivou o trabalho na equipe de Fórmula SAE, sem essa contribuição seria difícil manter um projeto tão difícil e que contribui significamente com o aprendizado de seus membros, além disso, agradeço pela atenção dispensada na realização desse trabalho.

E por fim, um agradecimento sincero à *Altair Itália* que me deu a oportunidade de desenvolver um estágio em que pude aprender as ferramentas necessárias para a realização desse projeto.

José Carlos Afonso Cuginotti Filho

# Resumo

Este trabalho tem o objetivo de descrever o projeto de simulação numérica de um atenuador de impacto utilizando material compósito, em particular fibra de carbono CFRP (carbon fiber reinforced polymer). O estudo foi feito com o suporte da empresa Altair Engineering Itália e da equipe Poli Racing de Fórmula SAE da Escola Politécnica da USP e tem por base o protótipo desenvolvida pela equipe. O modelo e a simulação foram feitos utilizando o pacote de softwares da Altair que inclui Altair HyperMesh, Altair HyperCrash, Altair HyperView e Altair HyperGraph. A solução foi realizada com o solver RADIOSS.

Em um primeiro momento, foi apresentado a revisão bibliográfica com a metodologia utilizada pelo solver para resolver o problema não-linear de impacto, então, uma rápida revisão sobre materiais compósito, em particular, CFRP (carbon fiber reinforced polymer) foi realizada e, em seguida, são apresentadas as propriedades mecânicas do material de referência utilizado nas simulações. Posteriormente, o modelo computacional foi descrito com todos os componentes utilizados e todas as informações referentes as configurações dos "cards" envolvidos na simulações, por fim, são apresentados os resultados obtidos.

Duas simulações diferentes foram realizadas, a primeira duplicando-se a energia inicial disponível por meio do aumento da massa e a segunda por meio do aumento da velocidade, a energia absorvida e os valores de acelerações média e máxima foram verificados e estão de acordo com os requerimentos exigidos pelas regras da SAE, logo, foi possível concluir que é possível desenvolver um atenuador de impacto feito exclusivamente com fibra de carbono para um veículo de fórmula SAE.

**Palavras-chaves:** Fórmula SAE. SAE (Sociedade de Engenharia Automotiva). Compósito. Fibra de Carbono. Atenuador de Impacto. Simulação Numérica. RADIOSS

# Abstract

This report has the objective to describe the project of a numerical analysis of a impact attenuator using composite materials. The study was done with the support of Altair Engineering Italy and Polytechnic School of São Paulo University's formula student team, Poli Racing, and is based on the Poli Racing's car. The model and simulation were done using Altair software that includes Altair HyperMesh, Altair HyperCrash, Altair HyperView and Altair HyperGraph. The solution was run with the Altair RADIOSS solver. In a first moment, it is presented a bibliographical revision with the methodology used by the solver to figure out the crash problem, then, a briefly revision of composites materials, specially CFRP (carbon fiber reinforced polymer) was done and then it was presented the mechanical properties of the reference material used in the simulations. After, the computational model was presented with all components used and all cards definitions related to them and, finally, the results obtained.

Two different simulations were done, one doubling the initial energy by the mass and the other one by the velocity, the energy absorbed and the mean and the maximum accelerations were checked and the results obtained meet the SAE rules requirements, thus, it was concluded that it is possible to develop a total nose carbon fiber impact attenuator for a formula student car.

**Keywords:**Formula student. SAE (Society of Automotive Engineers). Composites. Carbon Fiber. Impact attenuator. Numerical Simulatio. RADIOSS.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Motivação e Fórmula SAE</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>Equipe Poli Racing</b>	<b>3</b>
<b>1.3</b>	<b>Atenuadores de Impacto</b>	<b>3</b>
<b>1.4</b>	<b>Regras da Competição (SAE)</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>6</b>
<b>2.1</b>	<b>Método dos Elementos Finitos</b>	<b>6</b>
<b>2.2</b>	<b>Radioss</b>	<b>6</b>
<b>2.3</b>	<b>Análise estrutural</b>	<b>7</b>
2.3.1	Cinemática das Partículas	8
2.3.2	Movimento relativo de duas partículas	10
2.3.3	Equações básicas	10
2.3.4	Descrição da malha	11
2.3.5	Cálculo das tensões	12
2.3.6	Descrição Cinemática	13
2.3.7	Taxas de tensões	16
2.3.8	Tensões nos sólidos	16
2.3.9	Lagrangiano Total e Incremental e Formulação Corotacional	17
2.3.10	Equações de equilíbrio	19
2.3.11	Princípio do Trabalho Virtual	19
2.3.12	Formulação de grandes deformações	21
<b>2.4</b>	<b>Formulação de Elementos Finitos</b>	<b>22</b>
2.4.1	Forças nodais Externas e Internas	23
2.4.2	Matriz de Massa e Forças Inerciais	23
2.4.3	Equações discretas	24
2.4.4	Equações do Movimento	24
2.4.5	Coordenada dos Elementos	26
2.4.6	Integração e Forças nodais	27

2.4.7	Derivações de Funções . . . . .	28
2.4.8	Quadratura Numérica - Integração reduzida . . . . .	28
2.4.9	Procedimentos numéricos . . . . .	28
<b>3</b>	<b>DESCRÍÇÃO DO MATERIAL . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>3.1</b>	<b>Revisão Fibra de Carbono . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>3.2</b>	<b>Caracterização do Material . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>4</b>	<b>SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>4.1</b>	<b>Software e Solver . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>4.2</b>	<b>Características da malha . . . . .</b>	<b>35</b>
4.2.1	Controle da qualidade dos elementos . . . . .	37
<b>4.3</b>	<b>Material . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>4.4</b>	<b>Propriedade . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>4.5</b>	<b>Interface de contato . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>4.6</b>	<b>Análise da penetração inicial . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>4.7</b>	<b>Control Cards . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>5</b>	<b>SIMULAÇÃO DE IMPACTO . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>5.1</b>	<b>Descrição do Modelo . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>5.2</b>	<b>Condições iniciais de contorno . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>5.3</b>	<b>Resultados . . . . .</b>	<b>59</b>
5.3.1	1 - Aumento da massa . . . . .	60
5.3.1.1	Análise da energia . . . . .	60
5.3.1.2	Análise da aceleração . . . . .	62
5.3.1.3	Análise do intervalo de integração . . . . .	62
5.3.2	2- Aumento da velocidade . . . . .	63
5.3.2.1	Análise da energia . . . . .	64
5.3.2.2	Análise da Aceleração . . . . .	65
5.3.2.3	Análise do intervalo de integração . . . . .	66
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>6.1</b>	<b>Conclusões . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>6.2</b>	<b>Projetos Futuros . . . . .</b>	<b>67</b>



# Listas de ilustrações

Figura 1 – Competição de Fórmula SAE na Alemanha, 2009.(FORMULA..., 2017)	2
Figura 2 – FP05 - Equipe Poli Racing . . . . .	3
Figura 3 – Exemplo de um atenuador automotivo convencional.(CONSTELLIUM, 2017) . . . . .	4
Figura 4 – Exemplo de um atenuador de impacto em espuma. (FSAE, 2017) . . . . .	4
Figura 5 – Teste de um atenuador em fibra de carbono utilizado na Fórmula 1 (NOUXE, 2017) . . . . .	5
Figura 6 – Problema de discretização (ENGINEERING, 2017) . . . . .	7
Figura 7 – Sistema de coordenadas, (ENGINEERING, 2017) . . . . .	9
Figura 8 – Posição de um vetor com um referencial rotacional, (ENGINEERING, 2017) . . . . .	10
Figura 9 – Lagrangiano Total e Incremental e Formulação Corotacional, (ENGINEERING, 2017) . . . . .	18
Figura 10 – Procedimento numérico utilizado pelo RADIOSS, (ENGINEERING, 2017) . . . . .	29
Figura 11 – Resistência X Densidade (ASHBY, 2011) . . . . .	31
Figura 12 – Módulo Elástico Específico X Resitênciia Específica (ASHBY, 2011) . .	32
Figura 13 – Compósito com orientação unidirecional (JR, 2007) . . . . .	33
Figura 14 – Propriedades mecânicas resultantes (JR, 2007) . . . . .	33
Figura 15 – Propriedade mecânicas do compósito M46J (TORAY..., 2017) . . . . .	34
Figura 16 – CAD do atenuador de impacto . . . . .	36
Figura 17 – Superfície média com a malha . . . . .	36
Figura 18 – Detalhe da malha contendo elementos "tria"e "quads" . . . . .	37
Figura 19 – Definição Warpage (ENGINEERING, 2016) . . . . .	38
Figura 20 – Penalidade pelo método "Quality Index"(ENGINEERING, 2016) . . . . .	39
Figura 21 – Resultado para o Quality Index . . . . .	40
Figura 22 – Posições das camadas (ENGINEERING, 2016) . . . . .	45
Figura 23 – Propriedades com orientações diferentes . . . . .	46
Figura 24 – Orientação de referência dos elementos . . . . .	46
Figura 25 – Exemplo do posicionamento e orientação das camadas (layers) (ENGINEERING, 2016) . . . . .	47
Figura 26 – Método de integração completo para elementos com quatro nós (ENGINEERING, 2016) . . . . .	48
Figura 27 – Método de Penalidades (ENGINEERING, 2016) . . . . .	49
Figura 28 – Vãos do contato e força resistiva (ENGINEERING, 2016) . . . . .	49
Figura 29 – Definição do $Gap_{min}$ (ENGINEERING, 2016) . . . . .	50

Figura 30 – Definição de $G_m + G_s$ (ENGINEERING, 2016) . . . . .	50
Figura 31 – Definição de $G_m + G_s$ (ENGINEERING, 2016) . . . . .	50
Figura 32 – Força Resistiva X Penetração (ENGINEERING, 2016) . . . . .	51
Figura 33 – Controle da definição de "gap" utilizando o tamanho da malha (ENGINEERING, 2016) . . . . .	52
Figura 34 – Controle da Penetração e Intersecção Inicial . . . . .	53
Figura 35 – Simulação de Impacto . . . . .	56
Figura 36 – Modelo numérico no HyperCrash . . . . .	56
Figura 37 – Elementos rígidos associados ao componente . . . . .	57
Figura 38 – Definição da velocidade inicial no HyperCrash . . . . .	59
Figura 39 – Definição do acelerômetro no HyperCrash . . . . .	59
Figura 40 – Resultado para o caso 1 com plot das tensões de von Misses . . . . .	60
Figura 41 – Conservação de Energia para o primeiro caso . . . . .	61
Figura 42 – Energia Interna Atenuador de Impacto . . . . .	61
Figura 43 – Aceleração resultante para o primeiro caso . . . . .	62
Figura 44 – Time step para o primeiro caso . . . . .	63
Figura 45 – Resultado para o caso 2 com plot das tensões de von Misses . . . . .	64
Figura 46 – Conservação de Energia para o segundo caso . . . . .	64
Figura 47 – Energia Interna Atenuador de Impacto . . . . .	65
Figura 48 – Aceleração resultante para o segundo caso . . . . .	65
Figura 49 – Time step para o segundo caso . . . . .	66

# **Lista de tabelas**

Tabela 1 – Características da Malha . . . . .	37
Tabela 2 – Qualidade dos Elementos . . . . .	38
Tabela 3 – Valores do Quality Index . . . . .	40
Tabela 4 – Valores para /MAT/COMPSPH card . . . . .	44
Tabela 5 – Valores para /FAIL/CHANG card . . . . .	44
Tabela 6 – Disposição das camadas de carbono . . . . .	45
Tabela 7 – Resultados para o primeiro caso . . . . .	63
Tabela 8 – Resultados para o segundo caso . . . . .	66

# 1 Introdução

## 1.1 Motivação e Fórmula SAE

Fórmula SAE é uma competição de engenharia organizada pela "Society of Automotive Engineers"(SAE), no Brasil, a competição é organizada pela SAE Brasil. Na competição, os veículos de fórmula projetados e construídos pelos estudantes são avaliados em eventos estáticos e dinâmicos. O conceito usado na competição consiste em uma empresa imaginária que contrata um time para projetar, fabricar, testar e demonstrar o protótipo de um veículo de competição para o mercado não profissional e amador. O protótipo deve respeitar especificações técnicas rígidas de forma a garantir a segurança dos usuários e também estimular o desenvolvimento de habilidades de solução de problemas técnicos utilizando novas ideias e conceitos. Atualmente, existem 10 eventos oficiais de fórmula SAE em todo o mundo e sendo uma competição de engenharia e não apenas de desempenho, o projeto é avaliado com base na qualidade do projeto assim como a performance do veículo. A competição é composta por 8 desafios:

- Plano de Negócios (Business Plan), a equipe deve desenvolver um projeto de marketing demonstrando a possibilidade de produção e comercialização dos veículos do tipo fórmula.
- Design de Engenharia, todos os projetos desenvolvidos são apresentados e justificados com base nas teorias e cálculos de design.
- Análise de Custos, os valores de todos os itens e processos produtivos envolvidos na produção do veículo devem ser apresentados e justificados.
- Acceleration, evento dinâmico para avaliar a capacidade de aceleração longitudinal do veículo.
- Skid-Pad, evento dinâmico para avaliar a capacidade de aceleração lateral do veículo.
- Autocross, evento dinâmico para avaliar a performance máxima do veículo.
- Endurance, evento dinâmico para avaliar a durabilidade do veículo.
- Eficiência, realizado juntamente com a prova de Endurance, mede e avalia a eficiência energética do veículo.

Entre as várias exigências técnicas existentes nas regras que regem a competição, um dos itens refere-se ao atenuador de impacto frontal do veículo que deve proteger o piloto em



Figura 1 – Competição de Fórmula SAE na Alemanha, 2009.(FORMULA..., 2017)

caso de uma colisão por meio da absorção de energia e desaceleração controlada. É importante destacar que caso os requerimentos da regra não sejam satisfeitos, o veículo fica impedido de participar nos eventos dinâmicos durante as competições organizadas pela SAE. Em uma competição, o objetivo técnico global é atingir uma configuração veicular capaz de completar um percurso definido no menor tempo possível respeitando as regras impostas pela competição. O carro deve ser capaz de aumentar a velocidade em uma taxa máxima em cada volta e continuamente até o ponto em que uma máxima desaceleração é necessária e, dessa forma, em um intervalo reduzido de tempo, a velocidade deve começar a aumentar novamente. Idealmente, a aceleração deve começar imediatamente após o período de frenagem (MILLIKEN, 1995). Nesse cenário, um dos objetivos mais importantes consiste na massa total do veículo e minimizar a inércia é uma maneira importante de alcançar maiores acelerações e consequentemente maiores velocidades durante a corrida. Portanto, esse trabalho tem a intenção de relatar o projeto preliminar de um atenuador de impacto para um veículo de Fórmula SAE por meio da utilização da simulação numérica utilizando o método dos elementos finitos para analisar a possibilidade de uso de material compósito em fibra de carbono na confecção de um atenuador de impacto.

## 1.2 Equipe Poli Racing

A Equipe Poli Racing é o time de Fórmula SAE da Escola Politécnica da USP e o projeto do atenuador de impacto foi desenvolvido para aplicação no protótipo da equipe que atualmente utiliza um atenuador de impacto feito em espuma. A ideia é analisar os resultados de uma possível substituição do atual atenuador para um construído em fibra de carbono. A figura 2 ilustra um dos protótipos desenvolvidos pela equipe.



Figura 2 – FP05 - Equipe Poli Racing

## 1.3 Atenuadores de Impacto

Atenuadores de impacto são elementos absorvedores de energia equipados na frente do veículo para atuar em caso de uma colisão e, dessa forma, reduzir as consequências do impacto transmitidas aos ocupantes do veículo. Em impactos frontais é esperado que o atenuador se deforme absorvendo energia do impacto antes que outras partes da estrutura veicular e assim os danos da cabine principal são minimizados e os passageiros podem ser salvos(JIANG XIANGHUA LIU, 2013). Existem diferentes tipos de atenuadores de impacto construídos com materiais diversos. Em carros convencionais de viagem, é comum a utilização de atenuadores metálicos projetados na forma de barras transversais como mostrado na figura 3.

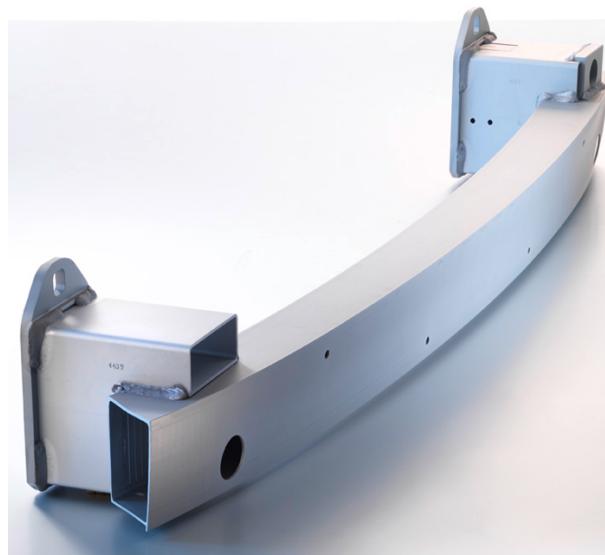


Figura 3 – Exemplo de um atenuador automotivo convencional.(CONSTELLIUM, 2017)

Um outro tipo de atenuador utiliza uma espuma e sua principal vantagem é que ele retorna para sua forma original após a colisão, atualmente esse é o absorvedor utilizado pela Equipe Poli Racing e a imagem 4 ilustra um exemplo.

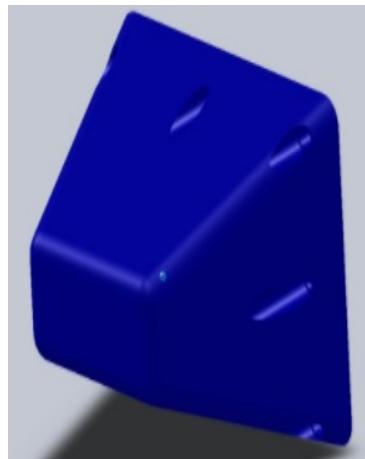


Figura 4 – Exemplo de um atenuador de impacto em espuma. (FSAE, 2017)

Menos comum e utilizado, existem também os atenuadores de impacto em fibra de carbono, em geral, eles estão associados a protótipos e veículos de alta performance em virtude do alto valor associado ao material e a produção. Além disso, essa tipo é destrutivo e deve ser substituído em caso de acidentes. A grande vantagem desse tipo de material é o baixo peso específico associado e, como citado anteriormente, é um fator importante a ser levado em conta durante a fase de projeto de um veículo de alta performance. Como exemplo, carros de fórmula 1 utilizam atenuadores frontais feitos em fibra de carbono como ilustrado na figura 5.



Figura 5 – Teste de um atenuador em fibra de carbono utilizado na Fórmula 1 (NOUXE, 2017)

## 1.4 Regras da Competição (SAE)

Para participar das provas dinâmicas da competição, o atenuador de impacto usado no veículo deve respeitar as seguintes exigências que serão utilizadas como parâmetros de projeto para a confecção do novo atenuador de impacto em fibra de carbono (ENGINEERING, 2017/2018): O atenuador deve obrigatoriamente:

- Apresentar pelo menos 200 mm de comprimento orientado ao logo da direção dianteira/traseira do sistema de coordenadas.
- Apresentar pelo menos 100 mm de altura e 200 mm de largura para uma distância mínima de 200 mm a frente do "Front Bulkhead".
- Deve ser seguramente fixado na chapa anti-intrusão ou diretamente no "Front Bulkhead"

Absorção de energia:

- O atenuador frontal, quando montado na frente de um veículo com massa total de 300 kg e chocando-se contra uma barreira sólida e não deformável com velocidade de impacto igual a 7 metros/segundo, deve desacelerar o veículo não excedendo uma média de 20 g's e um pico de 40 g's. A energia total absorvida deve ser maior ou igual a 7350 J.

Resumindo, para que o atenuador seja aprovado pelas regras de segurança, ele deve absorver no mínimo 7350 Joules antes de ser totalmente destruído e a aceleração deve ser menor que 40 g's em seu valor mais alto e menor que 20g's em seu valor médio. Portanto, os critérios de projeto definidos são:

- Aceleração máxima
- Aceleração média
- Energia total absorvida

## 2 Revisão Bibliográfica

### 2.1 Método dos Elementos Finitos

A simulação numérica do componente foi feita por meio da aplicação do método dos elementos finitos. A ideia básica desse método consiste na divisão da parte em uma quantidade finita de pequenos elementos discretos e contínuos e assim solucionar um conjunto de equações de equilíbrio e constitutivas aplicadas aos elementos e aos nós que conectam um elemento ao outro. A deformação e consequentemente a tensão varia através do contínuo, portanto, dividindo o componente em pequenas partes onde é mais simples aplicar as equações analíticas torna-se possível estimar o comportamento mecânico de acordo com as condições de contorno e cargas aplicas à malha. O resultado numérico pode ser melhorado diminuindo o tamanho dos elementos e consequentemente aumentando o número de elementos, o custo desse procedimento é o tempo maior necessário para a realização de todos os cálculos(NORTON, 2011).

### 2.2 Radioss

Para solução do problema numérico, foi utilizado o "solver" RADI OSS capaz de realizar simulações explícitas relacionadas ao problema de impacto. Altair RADI OSS é um solucionador de análise estrutural para casos altamente não-lineares submetidos à cargas dinâmicas que lidam com eventos não-lineares, dinâmicos e transitórios como é o caso da análise de impacto. Existem cinco passos para a redução do problema real em um problema computacional:

- Modelo geométrico.
- Aplicação das leis físicas.
- Formulação da evolução temporal.
- Discretização do espaço.
- Integração temporal.

A figura 6 representa o processo completo de solução.

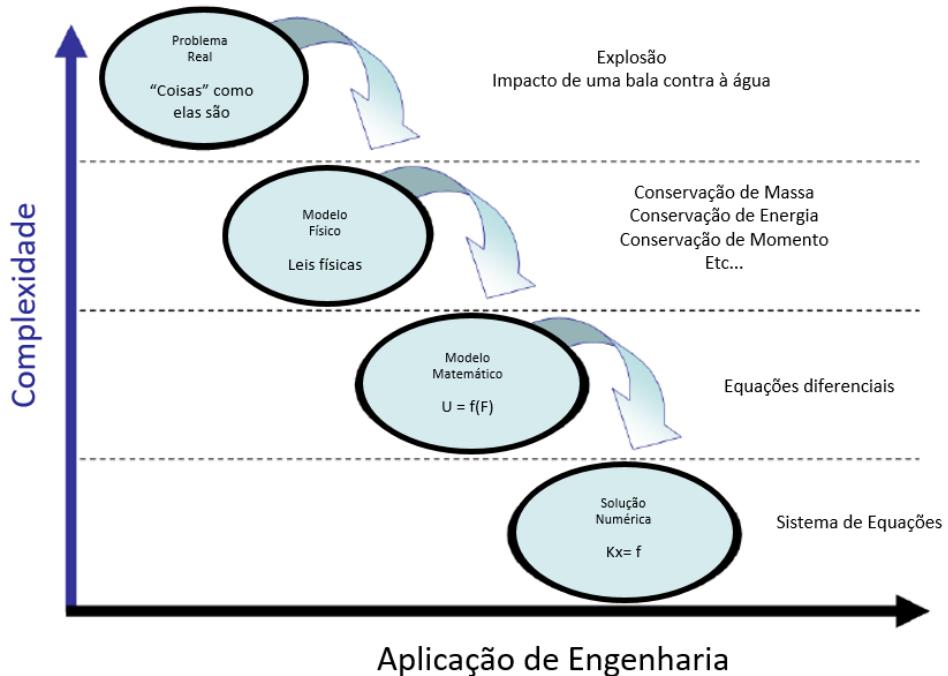


Figura 6 – Problema de discretização (ENGINEERING, 2017)

As principais características definidas por RADIOSS para solucionar análises não-lineares em elementos finitos são:(ENGINEERING, 2017)

- Descrição da malha pela formulação 3D Lagrangiana
- Esquema de integração temporal explícito levando a pequenos intervalos de tempo.
- Integrações simples nos modelos em elementos finitos.
- Montagem das forças nodais elemento por elemento levando a códigos de memória interna com baixos requerimentos de entradas e saídas quando comparados com códigos implícitos onde a montagem e inversão de matrizes são necessárias em cada intervalo de tempo.
- Procedimentos não-iterativos.
- Contatos baseados no método de penalidade
- Implementação altamente vetorizada.

### 2.3 Análise estrutural

O método e as informações apresentadas a seguir são baseadas no manual da Altair referente ao "solver"RADIOSS e descrevem a metodologia computacional implementada pelo software comercial.

### 2.3.1 Cinemática das Partículas

A cinemática lida com o movimentos e posição como função do tempo. As posições dos nós podem ser descritas utilizando coordenadas lineares ou angulares. Antes de tudo, é necessário revisar a descrição do movimentos curvilíneo espacial. O vetor posição  $R$ , a velocidade  $v$  e a aceleração de uma partícula podem ser descritos da seguinte forma:

$$R = \hat{x}\hat{i} + \hat{y}\hat{j} + \hat{z}\hat{k} \quad (2.1)$$

$$v = \dot{R} = \hat{x}\dot{i} + \hat{y}\dot{j} + \hat{z}\dot{k} \quad (2.2)$$

$$a = \ddot{R} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \quad (2.3)$$

Em coordenadas polares, a partícula pode ser descrita também como:

$$R = r\hat{r} + \theta\hat{\theta} + z\hat{k} \quad (2.4)$$

$$v = \dot{R} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k} \quad (2.5)$$

$$a = \ddot{R} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k} \quad (2.6)$$

E em coordenadas esféricas como mostrado na figura 7.

$$R = r\hat{r} + \theta\hat{\theta} + \phi\hat{\phi} \quad (2.7)$$

$$v = \dot{R} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\cos\phi\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\phi\hat{\phi} \quad (2.8)$$

$$a = \ddot{R} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2\cos^2\phi)\hat{r} + \left(\frac{\cos\phi}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} - 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi\right)\hat{\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\phi})}{dt} + r\dot{\phi}^2\sin\phi\cos\phi\right)\hat{\phi} \quad (2.9)$$

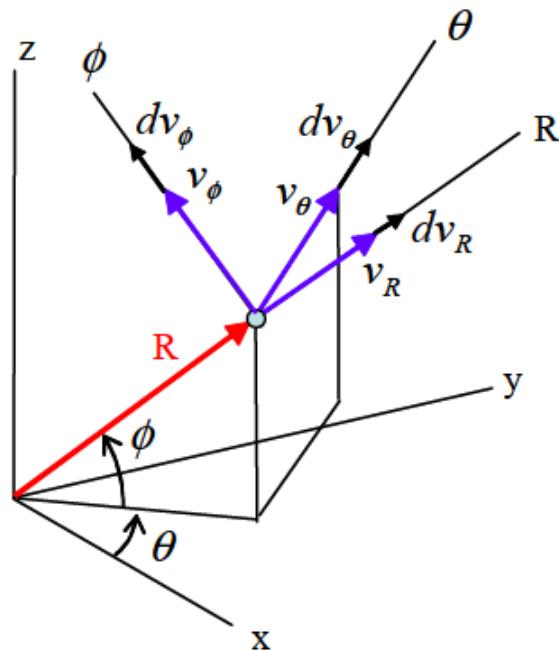


Figura 7 – Sistema de coordenadas, (ENGINEERING, 2017)

Para tornar a solução de algumas equações mais simples, pode ser interessante o uso do referencial que melhor descreve o movimento, portanto, é necessário realizar transformações durante os cálculos: O vetor velocidade pode ser descrito em coordenadas cilíndricas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} \text{ ou } \{V_{r\theta z}\} = [T_\theta] \{V_{xyz}\} \quad (2.10)$$

Para transformar para o espaço esférico é necessário realizar um simples rotação  $\phi$  dos eixos em torno do eixo  $\theta$ .

$$\begin{Bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_z \end{Bmatrix} \text{ ou } \{V_{r\theta\phi}\} = [T_\phi] \{V_{r\theta z}\} \quad (2.11)$$

E, então, a transformação direta do sistema de coordenadas retangular para o sistema esférico de coordenadas pode ser feito combinando 2.10 e 2.11.

$$\{V_{r\theta\phi}\} = [T_\phi] [T_\theta] \{V_{xyz}\} \text{ com } [T_\phi] [T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \phi \cos \theta & -\sin \phi \sin \theta & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

### 2.3.2 Movimento relativo de duas partículas

Deve-se agora considerar duas partículas A e B. O movimento de A pode ser visto como um movimento de A em relação a B.

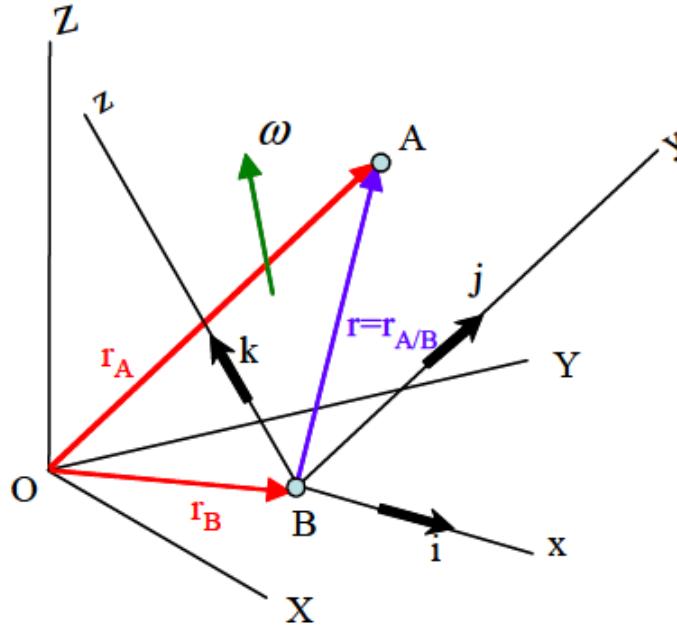


Figura 8 – Posição de um vetor com um referencial rotacional, (ENGINEERING, 2017)

Na figura 8, o sistema de referência com origem em B está se movendo em relação ao sistema com origem em O,  $\omega$  é o vetor da velocidade rotacional relativa e a velocidade absoluta pode então ser calculada como:

$$V_A = V_B + \omega \times r + V_{rel} \quad (2.13)$$

Onde  $r$  é o vetor posição A relativo a B descrito em xyz e  $V_{rel}$  é o vetor velocidade relativa entre A e B também descrito no sistema xyz de coordenadas  $V_{rel} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$ .  $V_A$  e  $V_B$  são as velocidades descritas no sistema XYZ de coordenadas. A seguinte expressão descreve a aceleração absoluta da partícula A no sistema XYZ.

$$a_A = a_B + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r) + 2\omega \times V_{rel} + a_{rel} \quad (2.14)$$

Onde  $a_{rel}$  é a aceleração entre A e B descrita no sistema referencial xyz,  $a_{rel} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$ .  $a_A$ ,  $a_B$  são as acelerações descritas em XYZ e o termo  $2\omega \times V_{rel}$  refere-se à aceleração de Coriolis. Portanto, usando a expressão 2.13 e 2.14, o movimento de um nó pode sempre ser analisado baseado na movimento dos outros nós conectados à ele.

### 2.3.3 Equações básicas

A mecânica contínua é baseada em três escolhas básicas no desenvolvimento da semi-discretização do problema de grandes deformações

- Descrição da malha.
- Descrição cinemática, ou seja, como a deformação é calculada.
- Descrição dinâmica, ou seja, como as tensões são calculadas.

### 2.3.4 Descrição da malha

Sendo  $X$  as coordenadas iniciais de um ponto material no sistema cartesiano de coordenadas e  $x$  as coordenadas do mesmo ponto material na configuração deformada ou final. O movimento ou deformação de um corpo pode ser descrito por uma função  $\varphi(X, t)$  onde o tempo e as condições iniciais são variáveis independentes.

$$x = \varphi(X, t) \quad (2.15)$$

Definindo  $u$  como a deformação, ela pode ser calculada para um ponto material como a diferença entre suas posições original e final:

$$u(X, t) = \varphi(X, t) - X \quad (2.16)$$

A coordenada  $X$  é chamada de coordenada material por ser independente e conhecida completamente enquanto a coordenada  $x$  é denominada coordenada espacial por representar pontos materiais resultantes de diferentes situações analisadas. Na mecânica dos sólidos, coordenadas materiais são chamadas de Lagrangianas. Na sua definição geral, elas recebem os valores das constantes de integração das equações diferenciais das trajetórias das partículas. Uma definição particular consiste em utilizar as coordenadas  $X$  dos pontos materiais na configuração inicial, esse ponto de vista corresponde à definição de coordenadas materiais na mecânica dos sólidos. O uso de coordenadas materiais é adequado para a mecânica dos sólidos pois deseja-se analisar a evolução de um conjunto de pontos dos quais deseja-se conhecer propriedades e configurações finais, dessa forma, integrações podem ser feitas na configuração inicial em que as propriedades geométricas são geralmente mais simples e bem definidas. Já na mecânica dos fluídos, o interesse maior está na evolução de uma situação em uma determinada região definida por condições fixas de contorno, as fronteiras são, em geral, atravessadas pelo fluido. Nesse caso, o importante é a configuração espacial enquanto o conjunto de partículas pode variar, e por esse motivo, a mecânica dos fluidos é, em geral, desenvolvida utilizando coordenadas espaciais ou Eurelianças. Na mecânica dos sólidos, a formulação Eureiana consiste na consideração de deslocamentos e condições iniciais como função das coordenadas espaciais  $x$ . O problema encontrado na utilização de coordenadas Eureianas em deformações de sólidos reside na dificuldade de formulação de equações constitutivas como, relações entre tensões e deformações que levem em conta a mudança na orientação do elemento. Por essa razão, a mecânica dos sólidos é desenvolvida principalmente por meio da abordagem do ponto de vista Lagrangiano. A razão para o uso das coordenadas materiais em

sólidos decorre principalmente da necessidade de um modelo preciso das condições de contorno.(ENGINEERING, 2017) Portanto, em *malhas Lagrangianas*, os pontos materiais e nós das malhas são sempre coincidentes, logo, os elementos se deformam e a precisão dos elementos e os intervalos de tempo se degradam com as distorções. Em *malhas Eulerianas* as coordenadas dos nós dos elementos estão sempre definidas e fixas e não ocorrem degradações na forma dos elementos, porém, as condições de contorno não permanecem fixas e devem ser aplicadas em pontos que não são nós, uma vez que os nós se movem porém as condições de contorno não. Existe ainda um terceiro tipo de malha chamado *Malha Langrangiana Euleriana arbitrária*(ALE), nesse caso, os nós podem mover-se arbitrariamente, mas os nós relacionadas as condições de contorno movem-se de forma a continuar nas regiões de contorno. Nós interiores se movem de forma a minimizar a distorção dos elementos. Na análise estrutural de componentes sólidos, a malha Lagrangiana é geralmente utilizada, e  $X$  é a variável independente, a coordenada  $X$  permanece inalterada a menos de uma distorção do elemento, logo, a deformação e tensões são definidas como funções das coordenadas materiais iniciais  $X$ , essa é a abordagem natural para sólidos já que as tensões dependem da história descrita por um ponto material, em outras palavras, depende da posição final de cada nó.

### 2.3.5 Cálculo das tensões

Para determinar-se as deformações e consequentes tensões, é necessário definir-se a matriz Jacobiana que relaciona as configurações iniciais e deformadas.

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = F_{ij} dX_j \quad (2.17)$$

$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$  por definição é chama de matriz Jacobiana  $F$ . Portanto a equação 2.17 pode ser reescrita como:

$$dx = F dX \quad (2.18)$$

Fisicamente, a determinação da matriz Jacobiana não pode assumir valores negativos nem nulos, pois ela mede a relação entre o volume final e o volume na configuração inicial contendo os mesmos pontos (definidos pela malha). Essa propriedade garante a existência única da transformada inversa.

$$dX = F^{-1} dx \quad (2.19)$$

Em um ponto onde a definição do campo  $u(X)$  é diferenciável, a transformação nas proximidades é definida por:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial(X_i + u_i(X, t))}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (2.20)$$

$$F = l + A \quad (2.21)$$

A matriz Jacobiana  $F$  pode ser obtida a partir da matriz dos gradientes dos deslocamentos.

### 2.3.6 Descrição Cinemática

Para problemas não-lineares, as seguintes medidas das deformações são aplicadas:

- "the velocity strain"(ou taxa de deformação).

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad (2.22)$$

- "the Green strain tensor"(tensor Lagrangiano de deformações) medido com relação à configuração inicial.

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) \quad (2.23)$$

- "the Almansi strain tensor"(tensor Eurelano de deformações )medido com relação à configuração deformada.

$$E_{ij}^A = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \quad (2.24)$$

Todas essas três medidas de defromações podem ser relacionadas entre elas e usadas com qualquer tipo de malha. A taxa de deformação ("strain rate") vem das derivadas das velocidades espaciais

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad (2.25)$$

Na forma matricial:

$$\dot{\varepsilon} = D = \frac{1}{2}(L + L^T) \quad (2.26)$$

Onde  $L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  é o gradiente de velocidades na atual configuração. A velocidade da partícula material é dada por:

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (2.27)$$

onde a derivada parcial em relação ao tempo  $t$  representa a taxa de variação da posição espacial  $x$  de uma dada partícula. A diferença de velocidade entre duas partículas na atual configuração pode ser calculada por:

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = L_{ij} dx_j = L_{ij} F_{jk} dX_k \quad (2.28)$$

Na forma matricial:

$$dv = Ldx = LFdx \quad (2.29)$$

A diferença de velocidade pode ser calculada diretamente também por:

$$dv = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial(FdX)}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t}dX = \dot{F}dX \quad (2.30)$$

Utilizando as equações 2.29 e 2.30:

$$L = \dot{F}F^{-1} \quad (2.31)$$

$L$  pode ser dividido em duas porções, uma relacionada à taxa de deformação e a outra ligada à taxa de rotação (spin):

$$L = D + \Omega \quad (2.32)$$

Onde,

$$\dot{\varepsilon} = D = \frac{1}{2}(\dot{F}F^{-1} + F^{-T}\dot{F}^T) \quad (2.33)$$

$$\Omega = \frac{1}{2}(\dot{F}F^{-1} - F^{-T}\dot{F}^T) \quad (2.34)$$

Apesar da formulação "velocity-strain" fornecer informações sobre a atual taxa de deformação, ela não apresenta informações referentes à deformação total no meio contínuo, por esse motivo, a formulação "velocity-strain" deve ser transformada em outra definição. A definição "green strain tensor" decorre do quadrado da distância que separa dois pontos na configuração final. Essa distância é dada na forma matricial por:

$$dx^T dx = dX^T F^T F dX \quad (2.35)$$

Subtraindo o quadrado da distância inicial, tem-se:

$$dx^T dx - dX^T dX = dX^T (F^T F - I) dX = 2E dX^T dX \quad (2.36)$$

Onde:

$$E = \frac{1}{2}(F^T F - I) \quad (2.37)$$

$C = F^T F$  e  $B = FF^T$  são chamados respectivamente de tensores de "Cauchy-Green" direito e esquerdo. Utilizando a equação 2.21:

$$E = \frac{1}{2}(A + A^T + A^T A) \quad (2.38)$$

É possível demonstrar que qualquer movimento  $F$  pode ser sempre descrito como um movimento puro rotacional de corpo rígido seguido de uma distensão pura das três direções ortogonais:

$$F = RU = R(I + H) \quad (2.39)$$

com a matriz de rotação  $R$  satisfazendo a condição de ortogonalidade:

$$R^T R = I \quad (2.40)$$

e  $H$  é simétrica. O teorema da decomposição polar é importante porque irá permitir a distinção entre o movimento de deformação e o movimento de rotação de corpo rígido. Das equações 2.37 e 2.39 decorre:

$$E = H + \frac{H^2}{2} = \frac{1}{2}(F^T F - 1) \quad (2.41)$$

$$R = F(I + H)^{-1} \quad (2.42)$$

$H$  pode ser calculado pela equação 2.41 e  $R$  pela equação 2.42. Como a decomposição da matriz Jacobiana  $F$  existe e é única,  $H$  é a nova medida de deformações que, também recebe o nome de deformações de Jaumann. As deformações de Jaumann necessitam de cálculos das direções principais de deformação. Se as rotações são pequenas, então:

$$R = I + \Omega \quad (2.43)$$

$$R^T R = (I + \Omega)^T (I + \Omega) \quad (2.44)$$

$$\Omega^T + \Omega = 0 \quad (2.45)$$

se os termos de segunda ordem são desprezados. Como resultado, tem-se para a matriz Jacobiana:

$$F = I + A = (I + \Omega)(I + H) \quad (2.46)$$

levando, se os termos de segunda ordem são desprezados, às clássicas relações lineares:

$$A = \Omega + H \quad (2.47)$$

$$H = \frac{1}{2}(A^T + A) \quad (2.48)$$

$$\Omega = \frac{1}{2}(A - A^T) \quad (2.49)$$

Portanto, para as equações 2.47 e 2.48, quando as rotações de corpo rígido são grandes, o tensor linear de deformações torna-se não nulo mesmo na ausência de deformações. Problemas relacionados à grandes deformações em que relações cinemáticas não-lineares são necessárias são aqueles em que os movimentos rotacionais de corpo rígido e as deformações são relevantes.

### 2.3.7 Taxas de tensões

Na prática, a tensão real (ou Cauchy stress) para qualquer intervalo será calculada utilizando a taxa de variação das tensões em uma integração explícita do tempo.

$$\sigma_{ij}(t + \delta t) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij}\delta t \quad (2.50)$$

Como as componentes das tensões reais estão associadas com as direções espaciais na configuração atual, a  $\dot{\sigma}_{ij}$  não é simplesmente a derivada temporal. Se o material não deforma porém sofre uma rotação rígida, a derivada não será nula. A derivada das tensões reais de Cauchy (taxa de tensões) representa a taxa de variação das deformações e também as mudanças do elemento relacionadas ao movimento médio de rotação de corpo rígido. Por esse motivo, é necessário separar  $\dot{\sigma}_{ij}$  em duas partes. RADIOSS utiliza a derivada do tensor objetivo de tensões de Jaumann:

$$\dot{\sigma}_{ij}^v = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^r \quad (2.51)$$

Onde:  $\dot{\sigma}_{ij}^v$  é o tensor objetivo de tensões de Jaumann relacionado à taxa de deformação da lei de tensão-deformação.  $\dot{\sigma}_{ij}^r$  é a taxa de variação das tensões devido à velocidade de rotação de corpo rígido. A correção para a tensão de rotação é dada por:

$$\dot{\sigma}_{ij}^r = \sigma_{ik}\Omega_{kj} + \sigma_{jk}\Omega_{ki} \quad (2.52)$$

onde  $\Omega$  foi definido na equação 2.34.

### 2.3.8 Tensões nos sólidos

Sabendo que o tensor de tensões é simétrico, é sempre possível encontrar uma matriz ortogonal que diagonaliza o tensor:

$$R^T \sigma R = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são chamadas de tensões principais e permitem uma representação 3D do estado de tensões em um determinado ponto. Com base nessas tensões principais, RADIOSS calcula duas invariantes: Pressão ( $p$ ) e tensão de von Misses ( $\sigma_{vm}$ ).

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad (2.54)$$

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{3}{2}((\sigma_{xx} + p)^2 + (\sigma_{yy} + p)^2 + (\sigma_{zz} + p)^2 + 2\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xz}^2 + 2\sigma_{zy}^2)} \quad (2.55)$$

A pressão ou primeiro invariante está relacionada à mudança de volume do sólido. O desvio de um estado hidrostático de tensões está ligado à mudanças na forma geométrica. O modificador do estado hidrostático de tensões é definido por:

$$S = \sigma + pI \quad (2.56)$$

O segundo invariante ou tensão de von Misses pode ser reescrito como:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{3}{2}((S_{xx})^2 + (S_{yy})^2 + (S_{zz})^2 + 2S_{xy}^2 + 2S_{xz}^2 + 2S_{zy}^2)} \quad (2.57)$$

### 2.3.9 Lagrangiano Total e Incremental e Formulação Corotacional

A discretização em elementos finitos por meio da malha Lagrangiana pode ser classificada como Total ou Incremental. Ambas usam a variável dependente como função do tempo e coordenadas materiais. Nas análises estruturais não-lineares, a configuração da estrutura deve ser obrigatoriamente monitorada no tempo, portanto, é necessário a utilização da descrição cinética em relação ao estado inicial de referência. Existem três possíveis escolhas para a descrição cinemática:

- **Descrição Lagrangiana Total (Total Lagrangian Description) (TL)** - As equações do método dos elementos finitos são formuladas em relação a uma configuração inicial fixa que não se altera durante a análise. Geralmente a configuração inicial é utilizada, porém, em casos especiais, a referência pode ser uma configuração artificial de base.
- **Descrição Lagrangiana Incremental (Updated Lagrangian Description) (UL)** - A referência é a ultima solução aceitável conhecida. Ela é mantida constante em um passo e atualizada ao final de cada passo de integração.
- **Descrição Corotacional (Corotational description) (CR)** - As equações do método dos elementos finitos são referenciadas à dois sistemas distintos. Um sistema fixo ou de configuração de base é utilizado como no método TL para o cálculo do movimento rotacional de corpo rígido de cada elemento. E o estado deformado atual é referenciado à configuração corotacionada obtida pelo movimento de corpo rígido do referencial inicial.

RADIOSS utiliza as duas últimas formulações e a imagem 9 ilustra um esquema de cada uma delas.

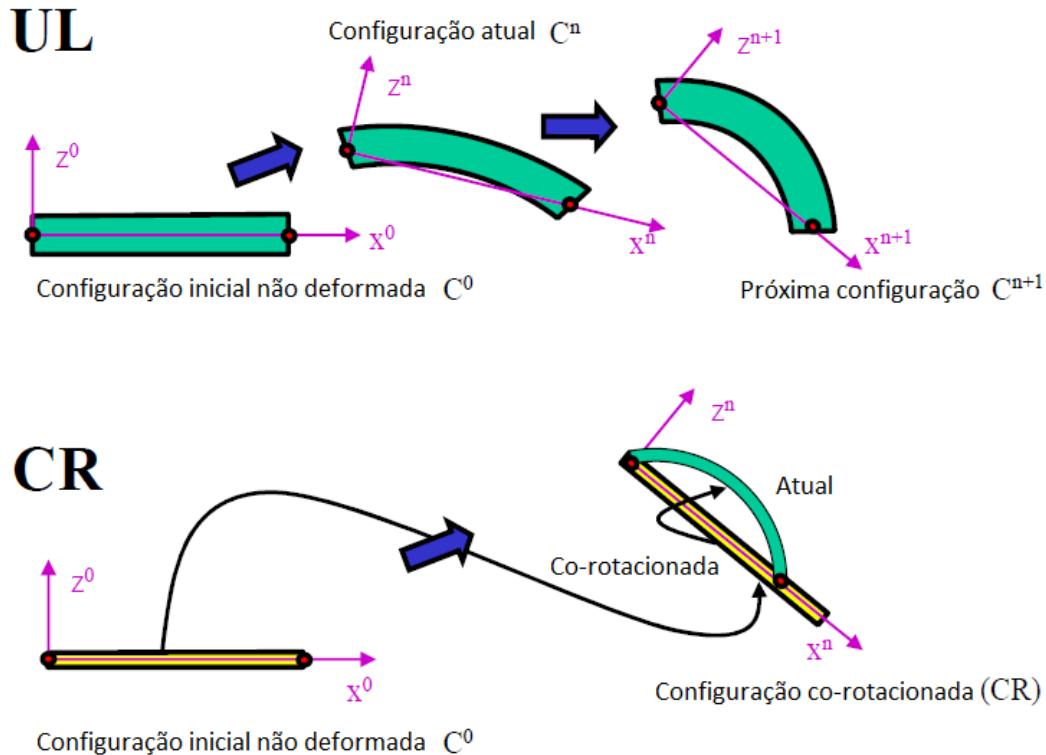


Figura 9 – Lagrangiano Total e Incremental e Formulação Corotacional, (ENGINEERING, 2017)

Em automático, RADIOSS utiliza uma formulação de grandes deformações e tensões com uma integração temporal explícita. As grandes tensões são resultado do cálculo incremental de tensões e as grandes deformações resultam do cálculo das derivadas das funções de forma em cada ciclo. Dessa forma, tensões e deformações são tensões e deformações verdadeiras. Utilizando a descrição cinemática por meio da formulação Lagrangiana Incremental, as coordenadas espaciais Eureelianas  $x$  correspondem às coordenadas Lagrangianas e as seguintes simplificações são utilizadas durante os cálculos:

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_k} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \quad (2.58)$$

$$d\Omega = d\Omega_0 \quad (2.59)$$

As derivadas são realizadas em respeito às coordenadas espaciais (Eureelianas) e as integrações acontecem sobre a configuração deformada. Na formulação corotacional utilizada em alguns elementos, as pequenas deformações não-lineares são desacopladas das não-linearidades geométricas e, assim, RADIOSS lida naturalmente com as questões da indiferença da orientação do comportamento anisotrópico devido a fabricação ou não-linearidades do material.

### 2.3.10 Equações de equilíbrio

Após apresentar a formulação da malha e também a formulação das tensões e defromações, agora é preciso entender como o "solver" calcula esses valores baseado nas equações de equilíbrio. Assumindo-se que  $\Omega$  é o volume ocupado por uma parte do corpo na configuração atual e  $\Gamma$  são os limites do corpo. Ainda utilizando a formulação Lagrangiana,  $\Omega$  é o volume ocupado pelo material no tempo atual. Considerando  $\tau$  como a superfície de tração em  $\Gamma$  e  $b$  as forças do corpo. A equação de equilíbrio de forças no corpo torna-se:

$$\int_{\Gamma} \tau_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_i d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} d\Omega \quad (2.60)$$

sendo  $\rho$  a densidade do material. A matriz verdadeira das tensões de Cauchy em um ponto de  $\Gamma$  é definida como:

$$\tau_i = n_j \sigma_{ji} \quad (2.61)$$

com  $n_j$  a normal para fora de  $\Gamma$ . Usando essa definição, a equação 2.60 pode ser reescrita como:

$$\int_{\Gamma} n_j \sigma_{ji} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_i d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} d\Omega \quad (2.62)$$

Utilizando o Teorema de Gauss, a integral de superfície pode ser reescrita como uma integral de volume da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} n_j \sigma_{ji} d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega \quad (2.63)$$

A equação diferencial de equilíbrio translacional é obtida aplicando a equação de equilíbrio de forças em qualquer ponto já que o volume foi definido arbitrariamente.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (2.64)$$

A equação de equilíbrio juntamente com o Teorema de Gauss define que a matriz de Cauchy dos valores reais de tensões deve ser simétrica e em cada ponto devem existir seis componentes independentes de tensões.

$$\sigma = \sigma^T \quad (2.65)$$

### 2.3.11 Princípio do Trabalho Virtual

Com o objetivo de desenvolver um modelo de deformações em elementos finitos, é necessário introduzir algumas aproximações espaciais locais para partes da solução. O primeiro passo consiste em substituir a equação de equilíbrio apresentada na seção anterior por

uma equação de equilíbrio equivalente fraca. Isso pode ser feito multiplicando-se a equação diferencial local por uma função arbitrária de teste de valor vetorial definida com continuidade adequada em todo o volume e integrando sobre o estado atual.

$$\int_{\Omega} \left( \partial v_i \left( \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i \right) \right) d\Omega = 0 \quad (2.66)$$

O primeiro termo na equação 2.66 pode ser expandido da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \left( \partial v_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial((\delta v_i) \sigma_{ji})}{\partial x_j} - \frac{\partial(\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} \right) d\Omega \quad (2.67)$$

O teorema de Gauss garante que:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial((\delta v_i) \sigma_{ji})}{\partial x_j} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_{\sigma}} ((\partial \delta v_i) n_j \sigma_{ji}) d\Gamma \quad (2.68)$$

levando-se em conta que as tensões desaparecem no complemento das fronteiras de tracionamento. Substituindo a equação 2.68 na equação 2.67 obtemos:

$$\int_{\Omega} \left( \partial v_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} ((\partial \delta v_i) \tau_i) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega \quad (2.69)$$

Se a última equação for substituída na equação 2.66:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial(\delta v_i)}{\partial x_j} \right) \sigma_{ji} d\Omega - \int_{\Omega} \delta v_i \rho b_i d\Omega - \int_{\Gamma} (\delta v_i) \tau_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta v_i \rho \dot{v}_i d\Omega = 0 \quad (2.70)$$

A expressão anterior é a forma fraca da equação de equilíbrio, das condições das fronteiras de tracionamento e das condições contínuas do interior do volume. A formulação é conhecida como princípio do trabalho virtual. O primeiro termo pode ser reescrito como:

$$\frac{\partial(\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} = (\delta D_{ij}) \sigma_{ji} = (\delta D_{ij} + \delta W_{ij}) \sigma_{ji} = \delta D_{ij} \sigma_{ji} \quad (2.71)$$

$\delta W_{ij} \sigma_{ji} = 0$  já que  $\delta W_{ij}$  é uma matriz simétrica oblíqua e  $\sigma_{ji}$  é simétrico.  $\delta D_{ij} \sigma_{ji}$  é a taxa interna de trabalho virtual ou trabalho virtual por unidade de volume. O trabalho interno total  $\delta P^{int}$  é definido pela integral de  $\delta D_{ij} \sigma_{ji}$ .

$$\delta P^{int} = \int_{\Omega} \delta D_{ij} \sigma_{ji} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega \equiv \int_{\Omega} \delta L_{ij} \sigma_{ji} d\Omega \quad (2.72)$$

O segundo e terceiro termos na equação 2.70 são os trabalhos virtuais externos:

$$\delta P^{ext} = \int_{\Omega} \delta v_i \rho b_i d\Omega + \int_{\Gamma} (\delta v_i) \tau_i d\Gamma \quad (2.73)$$

O último termo é o trabalho virtual inercial:

$$\delta P^{inert} = \int_{\Omega} \delta v_i \rho \dot{v}_i d\Omega \quad (2.74)$$

Portanto, o princípio do trabalho virtual pode ser escrito como:

$$\delta P = \delta P^{int} - \delta P^{ext} + \delta P^{inert} \quad (2.75)$$

para todos os  $\delta v_i$  admissíveis.

É possível observar que, mesmo o princípio do trabalho virtual sendo uma formulação fraca, ele impõe fortes equações de equilíbrio e é possível usar esse princípio com funções de forma convenientes como uma condição de equilíbrio. A vantagem de utilizar essa condição de equilíbrio é o fato de que a mesma pode ser definida na forma de uma integral de volume sobre o corpo. Então, é possível introduzir aproximações escolhendo-se funções de forma para o campo de velocidades virtuais cujas variações estão restritas a pequenos valores nodais.

### 2.3.12 Formulação de grandes deformações

Como dito anteriormente, problemas de impacto são calculados pelo RADIOSS utilizando a formulação padrão de grande tensões e grandes deformações com uma integração temporal explícita. Calculando-se as derivadas das funções de forma em cada ciclo, é obtida a formulação para grandes descolamentos. RADIOSS utiliza funções de forma construtivas isoparamétricas e as derivadas espaciais são dadas, então, por:

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j} = F(t)^{-1} \frac{\partial \Phi_I}{\partial r} \quad (2.76)$$

onde,  $F(t)$  é a matrix Jacobiana. Para cada elemento, as forças internas são integradas sobre o volume com um ponto de integração

$$f_{II}^{int} = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \left( \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_i} \right)_{t=0} d\Omega) = \sigma_{ij} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_i} \Omega \quad (2.77)$$

Integração temporal das tensões de Cauchy (tensões verdadeiras):

$$\sigma_{ij}(t + \delta t) = \sigma_{ij}(t) + \frac{d\sigma_{ij}(t)}{dt} dt \quad (2.78)$$

utiliza taxas de tensões objetivas, significando que o tensor de tensões segue a rotação de corpo rígido do material. A taxa de tensões é função da rotação média de corpo rígido do elemento. Já a taxa de defromação é obtida das derivadas espaciais da velocidade:

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.79)$$

onde:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j v_i} \quad (2.80)$$

A estabilidade do método explícito é dada pela condição de Courant:

$$\Delta t < \frac{l}{c} \quad (2.81)$$

com  $l$  o comprimento característico do elemento e  $c$  a velocidade do som. O "time step" é calculado para cada ciclo. Grandes deformações dos elementos pode levar a uma grande redução dos intervalos de integração ("time step"). Para deformações excessivamente grandes, um volume negativo pode ser alcançado e torna-se impossível inverter a matriz jacobiana e integrar as tensões sobre o volume.

## 2.4 Formulação de Elementos Finitos

Utilizando o método dos elementos finitos, o movimento  $x(X, t)$  é aproximado por:

$$x_i(X, t) = \Phi_I(x)x_{iI}(t) \quad (2.82)$$

com  $\Phi_I(x)$  a função de forma de interpolação e  $x_{iI}$  o vetor de posição do nó  $I$ . Para os índices inferiores, a soma é sobre o número de dimensões do espaço enquanto para o índices superiores, a soma é sobre o número de nós. O deslocamento dos nós é definido de acordo com a equação 2.16:

$$u_{iI}(X, t) = x_{iI} - X_{iI} \quad (2.83)$$

E, o campo de deslocamentos:

$$u_i(X, t) = \Phi_I(X)u_{iI}(t) \quad (2.84)$$

A derivada material dos deslocamentos, resulta, então, nas velocidades:

$$v_i(X, t) = \frac{\partial u_i(X, t)}{\partial t} = \Phi_I(X)v_{iI}(t) \quad (2.85)$$

Finalmente, as acelerações são dadas pela derivada material temporal das velocidades:

$$\dot{v}_i(X, t) = \Phi_I(X)\dot{v}_{iI}(t) \quad (2.86)$$

As funções das formas são funções das coordenadas materiais, independentemente da utilização da formulação Lagrangeana atualizada ou total. Toda a dependência na aproximação do movimento dos elementos finitos é levada em consideração nos valores das variáveis nodais. De 2.28 resulta que o gradiente de velocidades é dado por:

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{iI} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j} = v_{ij} \Phi_{I,j} \quad (2.87)$$

e a taxa de deformação resultante de 2.25 é dada por:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(L_{ij} + L_{ji}) = \frac{1}{2}(v_{iI} \Phi_{I,j} + v_{jI} \Phi_{I,i}) \quad (2.88)$$

e as funções de teste são aproximadas por:

$$\delta v_i(X) = \Phi_I(X)\delta v_{iI} \quad (2.89)$$

onde  $\delta v_{iI}$  são as velocidades nodais virtuais. Portanto, a função de teste pode ser substituída na equação do princípio do trabalho virtual 2.70 resultando em:

$$\delta v_{iI} \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega - \delta v_{iI} \int_{\Omega} \Phi_I \rho b_i d\Omega - \delta v_{iI} \int_{\Gamma_\sigma} \Phi_I \tau_i d\Gamma + \delta v_{iI} \int_{\Omega} \Phi_I \rho \dot{v}_i d\Omega = 0 \quad (2.90)$$

As velocidades virtuais devem satisfazer as condições de contorno, logo, utilizando a arbitrariedade das velocidades virtuais nodais em todos os lugares com exceção das partes que constituem as condições de contorno onde condições cinemáticas são especificadas, a formulação fraca da equação de momento resulta em:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega - \int_{\Omega} \Phi_I \rho b_i d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \Phi_I \tau_i d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_I \rho \dot{v}_i d\Omega = 0 \quad (2.91)$$

#### 2.4.1 Forças nodais Externas e Internas

As forças nodais internas são definidas por:

$$\delta P^{int} = \delta v_{iI} f_{iI}^{int} = \int_{\Omega} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega = \sigma_{iI} \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega \quad (2.92)$$

As tensões são as tensões verdadeira de Cauchy.

$$f_{iI}^{int} = \int_{\Omega} \sigma_{ji} \left( \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j} \right) d\Omega \quad (2.93)$$

Essas forças nodais são chamadas internas porque representam as tensões no corpo. São válidas para qualquer elemento e também para a malha completa. As derivadas são feitas em relação às coordenadas espaciais e as integrações são feitas na atual configuração deformada.

As forças externas podem ser definidas também na forma de trabalhos virtuais:

$$\delta P^{ext} = \delta v_{iI} f_{iI}^{int} = \delta v_{iI} \int_{\Omega} \Phi_I \rho b_i d\Omega + \delta v_{iI} \int_{\Gamma_\sigma} \Phi_I \tau_i d\Gamma \quad (2.94)$$

Portanto, as forças externas são:

$$f_{iI}^{int} = \int_{\Omega} \Phi_I \rho b_i d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \Phi_I \tau_i d\Gamma \quad (2.95)$$

#### 2.4.2 Matriz de Massa e Forças Inerciais

As forças inerciais do corpo são definidas como:

$$\delta P^{inert} = \delta v_{iI} f_{iI}^{inert} = \delta_{iI} \int_{\Omega} \Phi_i \rho \dot{v}_i d\Omega = \delta_{iI} \int_{\Gamma} \Phi_I \rho \dot{v}_i d\Gamma \quad (2.96)$$

logo, as forças inerciais são dadas por:

$$f_{iI}^{inert} = \int_{\Omega} \Phi_i \rho \dot{v}_i d\Omega \quad (2.97)$$

ou, utilizando a equação 2.86:

$$f_{iI}^{inert} = \int_{\Omega} \rho \Phi_i \Phi_j d\Omega v_{iJ}^{\cdot} \quad (2.98)$$

Definindo  $M_{ijIJ}$  como a matriz de massa:

$$M_{ijIJ} = \delta_{ij} \int_{\Omega} \rho \Phi_i \Phi_j d\Omega \quad (2.99)$$

$$f_{iI}^{inert} = M_{ijIJ} v_{jJ}^{\cdot} \quad (2.100)$$

### 2.4.3 Equações discretas

Portanto, a formulação fraca do princípio do trabalho virtual pode ser reescrita como:

$$\delta v_{iI} (M_{ijIJ} v_{jJ}^{\cdot} + f_{iI}^{int} - f_{iI}^{ext}) = 0 \quad (2.101)$$

e, levando-se em conta as arbitrariedades das velocidades virtuais:

$$M_{ijIJ} v_{jJ}^{\cdot} + f_{iI}^{int} = f_{iI}^{ext} \quad (2.102)$$

### 2.4.4 Equações do Movimento

A equação 2.102 pode ser reescrita na forma matricial como:

$$M \frac{dv}{dt} = f^{ext} - f^{int} \quad (2.103)$$

onde,  $M = \int_{\Omega} \rho \Phi^T \Phi d\Omega$  é a matriz de massa. RADIOSS utiliza o procedimento de massas concentradas, isto é, cada nó representa uma massa discreta com dimensão nula.

O vetor aplicado externamente é definido como:

$$f^{ext} = \int_{\Gamma} \Phi^T \tau d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \Phi^T b d\Omega \quad (2.104)$$

e o vetor interno como:

$$f^{int} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j} d\Omega \quad (2.105)$$

A equação global de movimentos também leva em consideração o vetor de força "anti-hourglass" e o vetor de força de contato:

$$M \frac{dv}{dt} = f^{ext} - f^{int} + f^{hgr} + f^{cont} \quad (2.106)$$

Quando trabalha-se com elementos "shell", "beam" e corpos rígidos, é necessário considerar também os graus de liberdade de rotação nodal e as equações de movimento para os graus

de liberdade rotacional se tornam simples quando escritas para cada nó no eixo principal de inércia ligado a cada um dos nós. O resultado é a definição padrão das equações de Euler.

$$I_1\alpha_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = m_1^{ext} - m_1^{int} \quad (2.107)$$

$$I_2\alpha_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = m_2^{ext} - m_2^{int} \quad (2.108)$$

$$I_3\alpha_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = m_3^{ext} - m_3^{int} \quad (2.109)$$

Onde:

- $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são os momentos principais de inércia em relação a  $x$ ,  $y$  and  $z$  respectivamente.
- $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  são as acelerações angulares expressas nos eixos referenciais principais.
- $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$  são as velocidades angulares.
- $m_1^{ext}$ ,  $m_2^{ext}$  e  $m_3^{ext}$  são os momentos externos aplicados principais.
- $m_1^{int}$ ,  $m_2^{int}$  e  $m_3^{int}$  são os momentos internos aplicados principais.

Na forma matricial e descrito no sistema referencial nodal principal:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M^{ext} - M^{int} + F(\omega) \quad (2.110)$$

A equação 2.110 é utilizada para o movimento de corpo rígido e  $F(\omega)$  é computado para um valor de  $\omega$  em  $t - \frac{\delta t}{2}$ . Para elementos "shell", "beams" e molas utilizando uma inércia esférica:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M^{ext} - M^{int} + M^{hgr} \quad (2.111)$$

com

- $I = \sum_{elements} I_e$  a matriz inercial diagonal.
- $M^{ext} = \sum_{elements} m^{ext}$  o vetor de momento aplicado externamente.
- $M^{int} = \sum_{elements} m^{int}$  o vetor de momento interno.
- $M^{hgr} = \sum_{elements} m^{hgr}$  o vetor de momento "anti-hourglass shell".

### 2.4.5 Coordenada dos Elementos

As funções de forma utilizadas no método dos elementos finitos são expressas em termos de sistemas de coordenadas intrínsecas  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ . É mostrado a seguir que expressar as funções de forma em termos de coordenadas intrínsecas é equivalente ao uso de coordenadas material. Portanto, é necessário considerar três domínios diferentes:

- o domínio no sistema de coordenadas intrínsecas.
- o domínio atual do elemento.
- o domínio de referência inicial do elemento.

$\xi$  está associado com a direção  $u$  (direção  $v_1$ ),  $\eta$  está associada com a direção  $v$  (direção  $v_2$ ) e  $\zeta$  está associado com a direção  $w$  (direção  $v_3$ ). O movimento em cada elemento pode ser descrito pela decomposição em três mapas diferentes:

- O mapa dos sistemas de coordenadas intrínsecas para a configuração inicial:  $X(\xi)$ ,  $X(\eta)$  e  $X(\zeta)$ .
- O mapa dos sistemas de coordenadas intrínsecas para a configuração atual:  $x(\xi, t)$ ,  $x(\eta, t)$  and  $x(\zeta, t)$ .
- O mapa da configuração inicial para a configuração atual:  $x = \varphi(X, t)$ .

O movimento do elemento é aproximado então por:

$$x_i(\xi, t) = \Phi_I(\xi)x_{iI}(t) \quad (2.112)$$

$$x_i(\eta, t) = \Phi_I(\eta)x_{iI}(t) \quad (2.113)$$

$$x_i(\zeta, t) = \Phi_I(\zeta)x_{iI}(t) \quad (2.114)$$

As funções de forma  $\Phi_I$  não possuem dimensões, apenas relacionam as coordenadas no mundo físico ao sistema de coordenadas intrínseco.

No tempo  $t = 0$ , na direção  $\xi$ , a equação 2.112, pode ser reescrita como:

$$x_i(\xi) = x_i(\xi, 0) = \Phi_I(\xi)x_{iI}(0) = \Phi_I(\xi)x_{iI} \quad (2.115)$$

E, pode-se ver que o sistema de coordenadas material e o sistema intrínseco são invariantes em um elemento Lagrangiano. Assim, as coordenadas intrínsecas são invariantes no tempo

e é possível utilizá-las para escrever deslocamentos, velocidades e acelerações. Para a direção  $\xi$  tem-se:

$$u_i(\xi, t) = \Phi_I(\xi) u_{iI}(t) \quad (2.116)$$

$$\dot{u}_i(\xi, t) = \Phi_I(\xi) \dot{u}_{iI}(t) \quad (2.117)$$

$$\ddot{v}_i(\xi, t) = \Phi_I(\xi) \ddot{v}_{iI}(t) \quad (2.118)$$

Elementos iso-paramétricos utilizam funções de forma iguais para a interpolação de  $x, u, \dot{u}$  e  $\ddot{v}$

#### 2.4.6 Integração e Forças nodais

As forças internas, externas e a matriz de massa definidas no atual domínio devem ser integradas sobre o domínio descrito no sistema de coordenadas intrínsecas  $\Delta$ .

Integrais nas configurações atuais estão relacionadas às integrais sobre as configurações do sistema de referência pelo Jacobiano e sobre o domínio no sistema de coordenadas intrínsecas:

$$\int_{\Omega} g(x) d\Omega = \int_{\Omega_0} g(x) |F| d\Omega_0 = \int_{\Delta} g(\xi) |F_{\xi}| d\Delta \quad (2.119)$$

e,

$$\int_{\Omega_0} g(X) d\Omega_0 = \int_{\Delta} g(\xi) |F_{\xi}^0| d\Delta \quad (2.120)$$

onde,  $|F|$  é o determinante do Jacobiano da transformação entre as configurações atual e inicial,  $|F_{\xi}|$  é o determinante Jacobiano da transformação entre a configuração atual e o domínio no sistema de coordenadas intrínsecas e  $|F_{\xi}^0|$  é o determinante Jacobiano da transformação entre a configuração de referência e o sistema de coordenadas intrínsecas. Utilizando a aproximação do movimento do elemento:

$$\frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \Phi_I(\xi)}{\partial \xi_j} x_{kl} = F_{\xi kj} \quad (2.121)$$

As forças internas serão obtidas na seguinte quadratura:

$$f_{iI}^{int} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Delta} \sigma_{ij} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j} |F_{\xi}| d\Delta \quad (2.122)$$

com  $|F_{\xi}|$  obtida da equação 2.121. Forças externas e matriz de massa podem ser integradas sobre o domínio no sistema de coordenadas intrínsecas de forma similar.

### 2.4.7 Derivações de Funções

Para calcular as forças internas, externas e matriz de massa, é necessário também resolver derivações da seguinte forma:  $\frac{\partial}{\partial x_j}$ . Essas derivadas parciais são obtidas por diferenciações implícitas:

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial \xi_k} F_{\xi k j}^{-1} = v_{iI} \frac{\partial \Phi_I}{\partial \xi_k} F_{\xi k j}^{-1} \quad (2.123)$$

Sendo  $F_{\xi k j}$  definido na equação 2.121 a matriz Jacobiana do mapa entre as atuais coordenadas e as coordenadas intrínsecas. Usualmente, não é possível haver expressões definidas da matriz Jacobiana. Como resultado, a inversão será realizada numericamente e a quadratura numérica será necessária para a avaliação das forças nodais.

### 2.4.8 Quadratura Numérica - Integração reduzida

RADIOSS integra numericamente todos os elementos. Portanto, as integrais para as forças nodais tornam-se simultâneas:

$$\int f(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^n w_j f(\xi_j) \quad (2.124)$$

onde  $n$  é o número de pontos de integração no elemento e  $w_j$  é o fator de peso associado a cada ponto de integração  $j$ . os valores de  $w_j$  e locais de  $\xi_j$  são dados em tabelas de acordo com a abordagem de quadratura numérica. RADIOSS usa esquemas de integração completos ou reduzidos dependendo do tipo de elemento presente na malha.

No caso de impacto estudado, foi utilizado um elemento "shell" com integração completa em que o número de pontos de integração é suficiente para a integração exata da expressão do trabalho virtual. Esse tipo de elemento não apresenta problemas de estabilidade, porém, algumas vezes, envolve o problema de "locking" e o cálculo é sempre dispendioso. "Locking" está associado ao comportamento de flexão, a variação da deformação através da espessura deve ser pelo menos linear na análise de tensão de membros relativamente finos sujeitos a flexão, portanto, elementos de primeira ordem de tensão constante não são adequados para representar esta variação, levando ao bloqueio de cisalhamento ("shear locking"). O fenômeno também ocorre quando a geometria não é capaz de oferecer a solução de pura flexão uma vez que o elemento deveria cisalar nos pontos de integração numérica para representar o comportamento cinemático real de flexão. O problema de "locking" induz rigidez ao modelo e uma forma de evitar seus efeitos é considerar as variações da espessura do elemento shell e as variações das tensões dentro do elemento, porém, isso aumenta ainda mais o custo computacional relacionado à solução do problema.

### 2.4.9 Procedimentos numéricos

O procedimento numérico utilizado pelo solver é apresentado na imagem 10.

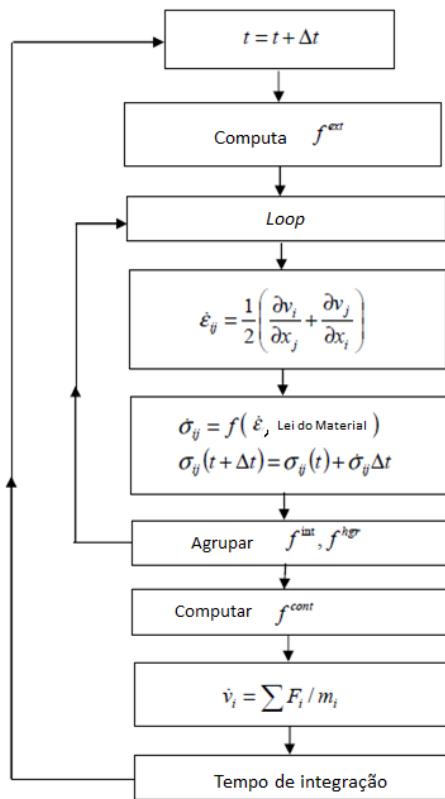


Figura 10 – Procedimento numérico utilizado pelo RADIOSS, (ENGINEERING, 2017)

Para cada passo de integração (time step):

1. O vetor de forças externas é construído e aplicado com base nos deslocamentos, velocidades e acelerações no ciclo atual.
2. As forças internas e de "hourglass" são calculadas juntamente com o cálculo de próximo "time step". O procedimento para este loop é:

- A matriz Jacobiana é utilizada para relacionar deslocamentos no sistema de coordenadas intrínsecas ao espaço físico real:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \Big|_t = F_\xi^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_t \quad (2.125)$$

- As taxas de deformações são calculadas:

$$\dot{\epsilon} = (\frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j}) \dot{x} = \frac{1}{2} (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \quad (2.126)$$

- As taxas de tensões são calculadas:

$$\dot{\sigma}_{ij} = f(\dot{\epsilon}, leidomaterial) \quad (2.127)$$

- As tensões reais de Cauchy são computadas utilizando a integração temporal:

$$\sigma(t + \Delta t) = \sigma(t) + \dot{\sigma} \Delta t \quad (2.128)$$

- Os vetores de forças internas e de "hourglass" são determinados.
  - O próximo intervalo de integração é computado utilizando o "time step" do elemento ou nodal
3. A força de contato entre qualquer interface é calculada após o cálculo das forças internas e de "hourglass"
  4. Com a determinação de todas as forças, utilizando as equações de equilíbrio do princípio do trabalho virtual, as novas acelerações são calculadas utilizando a matriz de massa e os vetores de forças internas e externas:
$$\dot{v}_i = M^{-1}(f_{ext_i} - f_{int_i}) \quad (2.129)$$
  5. Finalmente, é feita a integração temporal das acelerações e velocidades utilizando os novos valores dos elementos e uma nova posição é definida para os nós.

# 3 Descrição do Material

## 3.1 Revisão Fibra de Carbono

A expressão *Fibra de Carbono* é utilizada para referir-se ao material formado por fibras de carbono imersas em uma matriz de resina (CFRP - "Carbon fiber-reinforced polymer composites"). Dessa forma, as propriedades do compósito é função das propriedades das duas fases, suas quantidades relativas e da geometria da fase dispersa de fibras de carbono. A utilização desse material está relacionada a elevadas propriedades mecânicas associadas a uma baixa massa, como pode ser observado no gráfico 11 que relacionada resistência à densidade. Observando a parte superior da imagem onde aparecem os materiais com valores superiores a  $1000 MPa$ , é possível perceber que o CFRP é aquele que apresenta a menor densidade, justificando assim aplicações onde a massa total é relevante, como, por exemplo, no caso de veículos de alta performance.

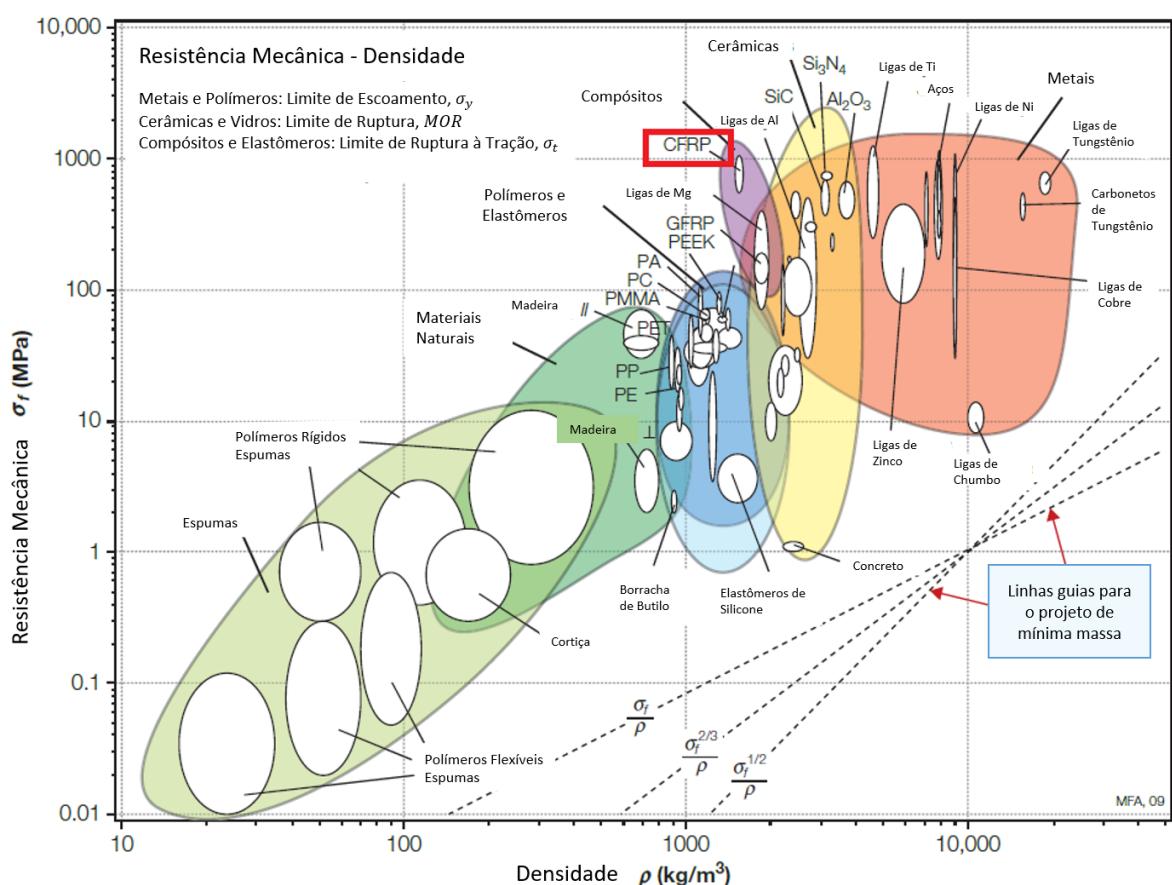


Figura 11 – Resistência X Densidade (ASHBY, 2011)

Outro ponto de destaque é a capacidade de absorção de energia, relevante para aplicações de atenuação de impacto. O próximo gráfico 12 ilustra o módulo de elasticidade específico pela resistência específica. Materiais compósito, em particular CFRP, estão localizados na parte superior direita, logo, apresentam a maior relação rígidez e resistência o que significa que podem absorver uma quantidade considerável de energia com uma quantidade reduzida de material, esse é um dos motivos pelo qual a fibra de carbono vem sendo cada vez mais utilizada em aplicações relacionadas à aeronáutica e grandes performances dinâmicas.

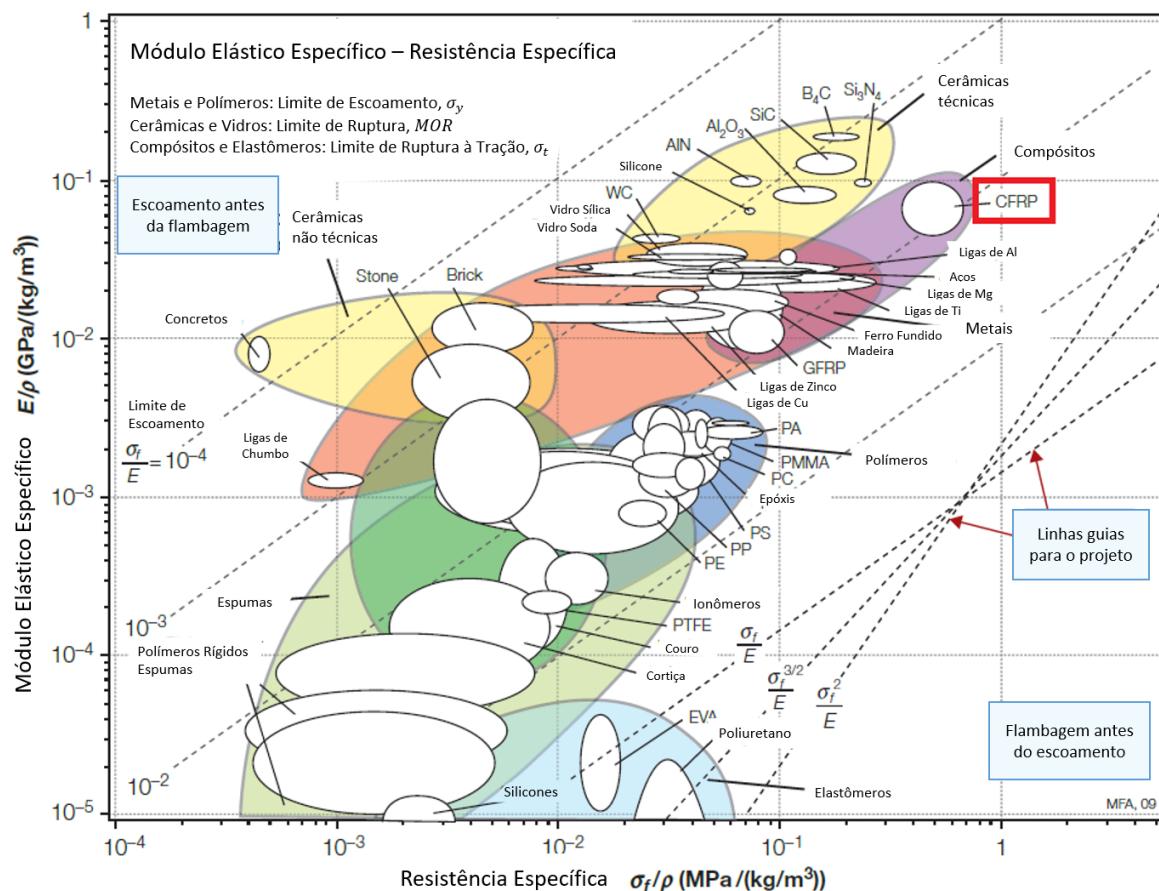


Figura 12 – Módulo Elástico Específico X Resistência Específica (ASHBY, 2011)

No entanto, o aspecto negativo desse material é o elevado custo associado à produção e aplicação.

É importante também entender as razões físicas para esse comportamento mecânico. O arranjo e a orientação de uma fibra em relação às outras, a concentração de fibras, e a forma de distribuição dentro da matriz possuem uma influência significante nas propriedades de materiais compósito reforçados por fibras (JR, 2007). Para entender como um material composto funciona, considera-se primeiro um arranjo contínuo e alinhado de fibras como ilustrado na imagem 13.

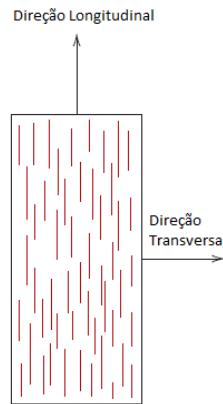


Figura 13 – Compósito com orientação unidirecional (JR, 2007)

Materiais com essa configuração são altamente anisotrópicos e as propriedades mecânicas elevadas estão associadas à direção da fibra, logo é esperado cargas paralelas à essa direção aplicadas ao material. A resposta mecânica, incluindo a curva tensão-deformação, dependerá na combinação das propriedades da matriz e da fibra. A imagem seguinte 14 exemplifica esse comportamento.

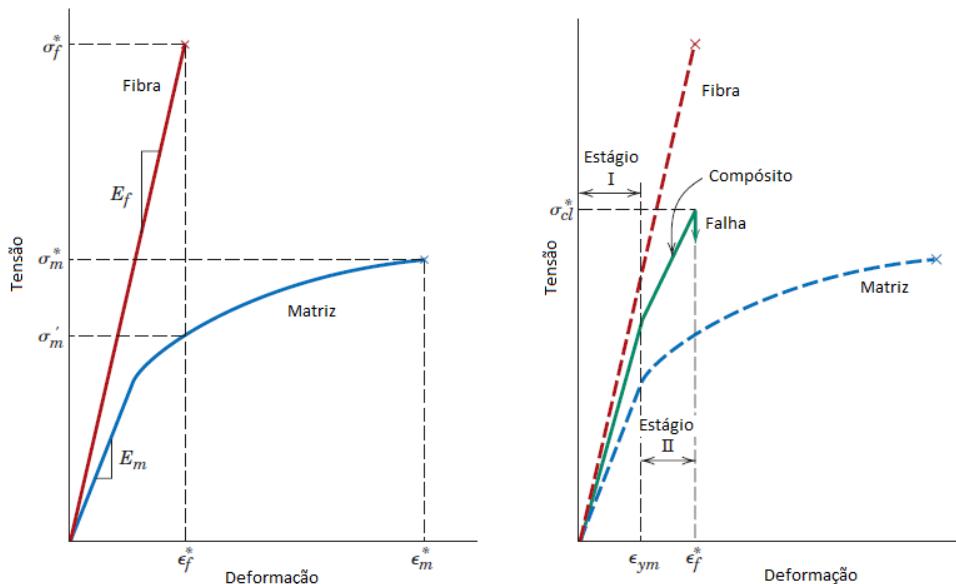


Figura 14 – Propriedades mecânicas resultantes (JR, 2007)

A falha do material compósito inicia quando as primeiras fibras começam a romper, o que corresponde aproximadamente ao ponto de deformação  $\epsilon_f^*$  na figura 14. No entanto, o material não irá falhar imediatamente, porque as fibras não rompem todas simultaneamente e também, a matriz continuará intacta. Portanto, o material irá falhar completamente depois que todas as fibras e a matriz sejam danificadas. É muito comum utilizar mais de uma camada de material na produção do material, dessa forma, é possível aprimorar o comportamento mecânico já que mais fibras e matriz irão resistir às cargas aplicadas. Além disso, aplicando mais de uma camada de material, é possível também alterar a

resposta unidirecional combinando-se diferentes orientações em cada camada. Portanto, utilizando uma estrutura sanduíche, a falha irá acontecer depois que todas as fibras e matriz sejam danificadas em todas as camadas utilizadas.

Sendo assim, é possível resumir o uso do composto em fibra de carbono por:

- Apresentar o valor mais elevado de resistência mecânica e módulo elástico entre os materiais reforçados com fibras,
- Manter valores elevados do módulo de elasticidade e resistência mecânica mesmo em temperaturas elevadas, desde que a matriz não seja afetada pelas altas temperaturas,
- Permitir o controle das propriedades mecânicas finais controlando a orientação e número das camadas aplicadas, permitindo a produção de componentes com aplicações específicas.

## 3.2 Caracterização do Material

As propriedades físicas usadas nas simulações, como será apresentado no próximo capítulo, são baseadas nas especificações comerciais do composto **M46J** produzido por **Torayca**. Trata-se de um composto em fibra de carbono, bi-axial com fibras perpendiculares e as propriedades podem ser consideradas iguais nas direções ortogonais. As propriedades apresentadas baseiam-se no uso de uma matriz em *Resina Epoxy Toray 250 °F*, 60% volume resina, 40% volume fibra. A imagem a seguir mostra a tabela de valores fornecida pelo fabricante.

<b>PROPRIEDADES DOS COMPÓSITOS *</b>		
Limite de resistência à tração	320 ksi	2,210 MPa
Módulo de elasticidade	38.5 Msi	265 GPa
Deformação	0.8 %	0.8 %
Limite de resistência à compressão	155 ksi	1,080 MPa
Limite de resistência à flexão	210 ksi	1,420 MPa
Módulo de resistência à flexão	32.0 Msi	220 GPa

Figura 15 – Propriedade mecânicas do compósito M46J (TORAY..., 2017)

Os valores apresentados nas tabelas 4 e 5 baseiam-se nessas informações técnicas disponibilizadas pela fabricante do material. Esse componente também apresenta comportamento frágil como àquele apresentado na imagem 14, o que significa que o material falha imediatamente após o pequeno comportamento elástico e, por esse motivo, será utilizado um critério de falha durante as simulações computacionais capaz de levar em conta essa característica ao utilizar um valor infinito para o trabalho plástico de referência na definição do material.

# 4 Simulação Computacional

## 4.1 Software e Solver

Foram utilizados quatro softwares diferentes para desenvolver o modelo computacional e a análise do atenuador de impacto em fibra de carbono.

- Altair HyperMesh Desktop - utilizado para criar a malha na geometria e controlar a qualidade dos elementos.
- Altair HyperCrash - utilizado para configurar a análise de impacto, incluindo a definição das condições de contorno, propriedades e material.
- Altair HyperView - utilizado para o pós-processamento dos resultados, permite a visualização dos resultados por meio da representação 3D.
- Altair HyperGraph - utilizado para o pós-processamento dos resultados, permite a visualização dos resultados por meio da representação 2D através de gráficos.

Todos os softwares utilizados correspondem a **versão 2017.0** do pacote **Altair HyperWorks Desktop**.

Para realizar as simulações, e consequentemente gerar os resultados, foi utilizado o solver **RADIOSS 2017** descrito no capítulo 2, também pertencente à empresa **Altair Engineering**.

## 4.2 Características da malha

A geometria utilizada para modelar o novo atenuador de impacto foi baseada nas dimensões do veículo atual da equipe Poli Racing, e é apresentada na figura 16.

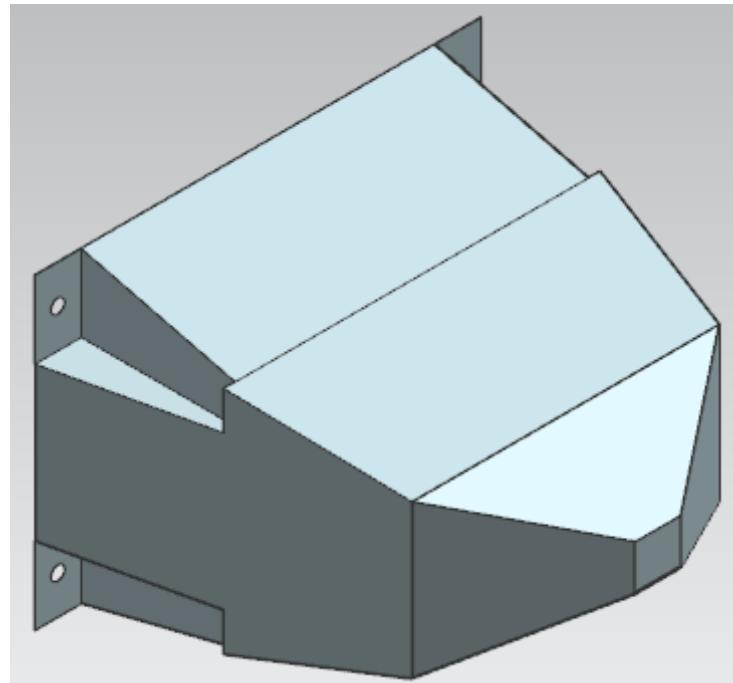


Figura 16 – CAD do atenuador de impacto

Como a espessura do atenuador tem dimensões desprezíveis quando comparadas às outras dimensões, o componente pode ser modelado com elementos 2D o que permite um uso otimizado dos recursos computacionais. Para a realização da malha, foi utilizado elementos "quad" com um número controlado de elementos "tria" apenas para manter a qualidade da malha. O uso excessivo de elementos "tria" induz rigidez ao componente, e por esse motivo, o uso desse tipo de elemento foi evitado, e a malha foi feita predominantemente com elementos do tipo "quad".

A malha foi criada na superfície média da geometria CAD do atenuador de impacto utilizando a função automática "2D auto-mesh" presente no software Altair HyperMesh. A imagem 17 ilustra o resultado obtido.

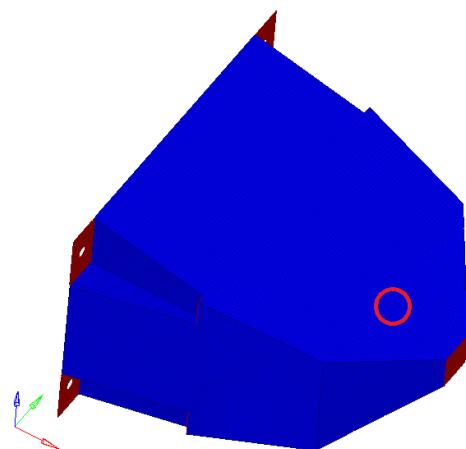


Figura 17 – Superfície média com a malha

A imagem 18 apresenta os detalhes da parte destacada na figura 17 da superfície superior onde é possível observar o uso dos elementos "quad" e "trias".

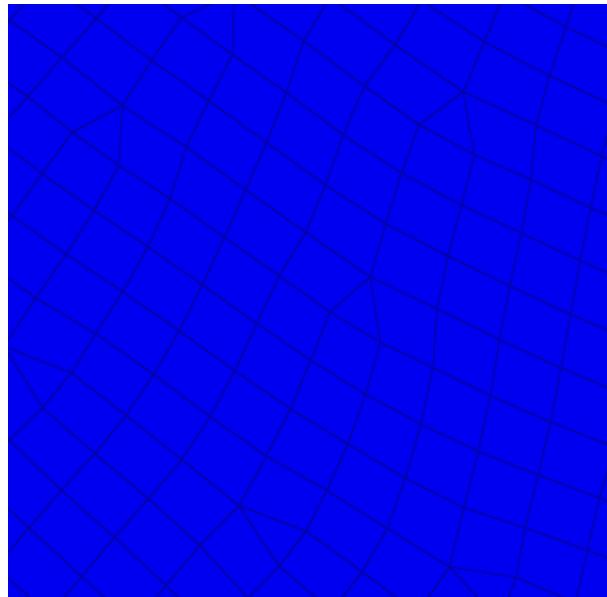


Figura 18 – Detalhe da malha contendo elementos "tria" e "quads"

A malha foi feita utilizando um elemento de 3 mm, que corresponde a aproximadamente 10% do menor comprimento do componente. Como referência, a base do atenuador de impacto possui, na direção  $Y$  290 mm e na direção  $Z$  200 mm, e o comprimento na direção  $X$  possui 260 mm.

A próxima tabela apresenta os valores obtidos para a malha:

Parâmetro	Valor
Número de elementos	21913
Elementos quad	21469
Elementos tria	444

Tabela 1 – Características da Malha

#### 4.2.1 Controle da qualidade dos elementos

Com o objetivo de controlar a qualidade da malha e, dessa forma, garantir um bom resultado para a solução numérica, alguns parâmetros dos elementos foram controlados, e, para atingir a qualidade desejada, a malha foi refeita em áreas onde os elementos não apresentavam valores elevados.

Os seguintes aspectos foram analisados individualmente:

- Aspect Ratio - Trata-se da razão entre a comprimento da maior aresta do elemento e a menor aresta ou a menor distância de um nó até a aresta oposta. De acordo

com o manual do solver (ENGINEERING, 2016), o aspect ratio deve ser menor que 5:1 na maioria dos casos.

- Warpage - Mede o desvio planar de um elemento, Warpage de até 5 graus é, em geral, aceitável. Esse parâmetro é aplicado apenas para os elementos "quad", o elemento é dividido em dois elementos "trias" ao longo da sua diagonal, e o ângulo entre as direções normais dos elementos "trias" é medido.

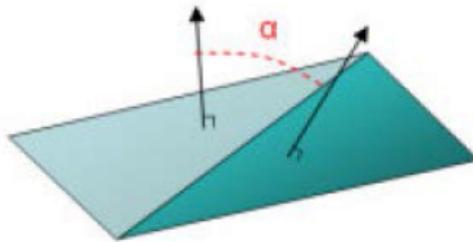


Figura 19 – Definição Warpage (ENGINEERING, 2016)

- Jacobiano - É um dos critérios mais importantes, mede o desvio de um elemento da sua forma ideal, O Jacobiano pode variar entre 0.0 e 1.0 sendo que 1.0 é o elemento com forma perfeita. Porém, valores superiores a 0.7 são aceitos. O determinante do Jacobiano mede o alongamento local do espaço paramétrico necessário para ajustar o elemento ao espaço de coordenadas global. O software HyperMesh avalia o determinante do jacobiano em cada um dos pontos de integração do elemento (também chamado de pontos de Gauss) e reporta a razão entre o menor e o maior valor.

A tabela 2 apresenta os valores finais obtidos para a malha usada na simulação:

Critério	Valor de Referência	Valor observado	número de elementos com falha
Aspect Ratio	5.0	Máximo 2.04	0
Warpage	5.0	Máximo 4.75	0
Jacobião	0.7	Mínimo 0.73	0

Tabela 2 – Qualidade dos Elementos

Existe ainda uma outra maneira mais completa de analisar a qualidade da malha utilizando o software HyperMesh, chamada "Quality Index". O valor do "Quality Index" é função de 12 critérios com pesos definidos pelo usuário. Cada critério possui cinco níveis de classificação e o software assinala uma penalidade baseada no quão distante o critério analisado está do valor de referência. A penalidade varia linearmente de 1.0 até 10.0 e os elementos que estão dentro dos valores esperados recebem valores de penalidade que variam entre 0.0 e 1.0 baseado em quão próximo ao valor ideal o elemento se encontra. Logo, o resultado final é função da penalidade individual de cada critério e quanto mais próximo a zero, mais a malha se aproxima aos valores definidos pelo usuário.

O **Q.I do elemento** é a soma da média ponderada das penalidades que passaram mais a soma da média ponderada das penalidades que falharam, o **Critério Q.I** é a média ponderada dos elementos que passaram mais a média ponderada dos elementos que falharam e o resultado final, **compound Q.I**, é a média ponderada dos critérios Q.I que passaram mais a média ponderada dos critérios Q.I que falharam.

A figura 20 ilustra como a penalidade é calculada de acordo com os valores definidos pelo usuário.

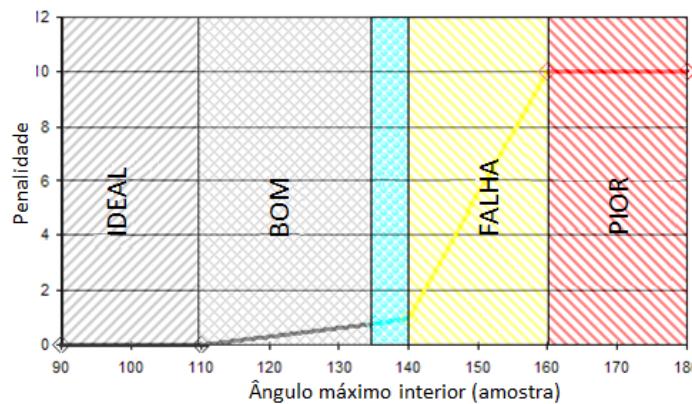


Figura 20 – Penalidade pelo método "Quality Index" (ENGINEERING, 2016)

No modelo do atenuador de impacto, o "Quality Index" foi calculado utilizando 11 critérios:

- Tamanho mínimo
- Tamanho máximo
- Aspect Ratio (Razão Aparente)
- Warpage (Distorção)
- Skew (Inclinação)
- Jacobiano
- Máximo ângulo do elemento quad
- Mínimo ângulo do elemento quad
- Máximo ângulo do elemento tria
- Mínimo ângulo do elemento tria
- Conicidade

A figura 21 apresenta os resultados obtidos para o modelo, e, como pode ser observado, todos os critérios foram satisfeitos e o valor final para o "compound Q.I" foi **0.00** demonstrando uma qualidade elevada da malha.

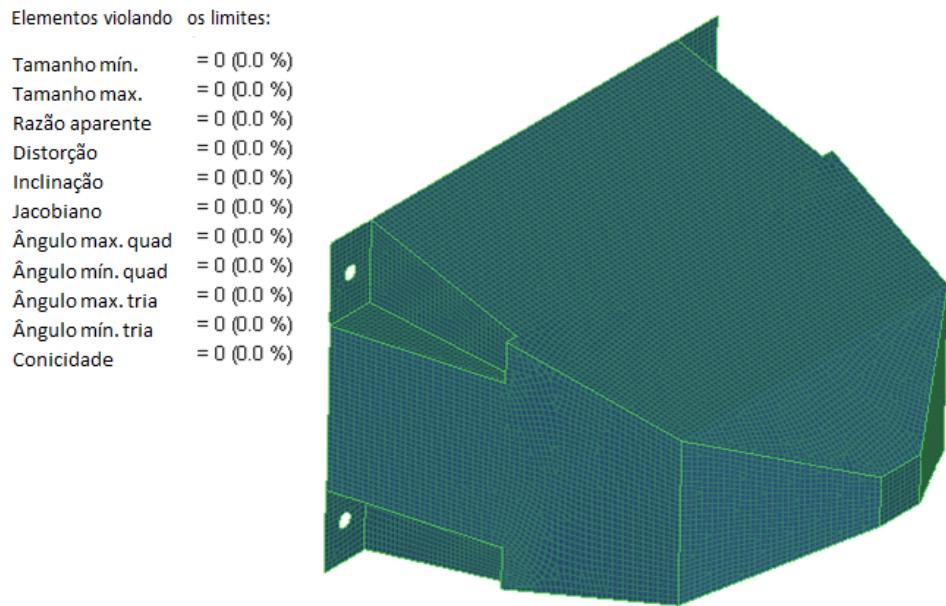


Figura 21 – Resultado para o Quality Index

Os valores de referência utilizados no cálculo do Quality Index são apresentados na tabela 3.

Criteria							
Checks	On	Weight	Ideal	Good	Warn	Fail	Worst
Min Size	<input checked="" type="checkbox"/>	1.0	3.000	2.000	1.500	1.000	0.500
Max Size	<input checked="" type="checkbox"/>	1.0	3.000	6.400	11.500	20.000	37.000
Aspect Ratio	<input checked="" type="checkbox"/>	1.0	1.000	2.000	4.400	5.000	10.000
Warpage	<input checked="" type="checkbox"/>	1.0	0.000	5.000	13.000	15.000	30.000
Max Interior Angle Quad	<input checked="" type="checkbox"/>	1.0	90.000	110.000	134.000	140.000	160.000
Min Interior Angle Quad	<input checked="" type="checkbox"/>	1.0	90.000	70.000	46.000	40.000	20.000
Max Interior Angle Tria	<input checked="" type="checkbox"/>	1.0	60.000	80.000	112.000	120.000	150.000
Min Interior Angle Tria	<input checked="" type="checkbox"/>	1.0	60.000	50.000	34.000	30.000	15.000
Skew	<input checked="" type="checkbox"/>	1.0	0.000	10.000	34.000	40.000	70.000
Jacobian	<input checked="" type="checkbox"/>	1.0	1.000	0.900	0.700	0.600	0.300
Chordal Deviation	<input type="checkbox"/>	1.0	0.000	0.300	0.800	1.000	2.000
Taper	<input checked="" type="checkbox"/>	1.0	0.000	0.200	0.500	0.600	0.900
% of Trias	<input checked="" type="checkbox"/>	1.0	0.000	6.000	10.000	15.000	20.000

Tabela 3 – Valores do Quality Index

### 4.3 Material

Após a criação da malha, é necessário definir um material para os elementos. Como já mencionado, a ideia do projeto é construir um atenuador de impacto feito em fibra de carbono, principalmente por causa do baixo peso associado a esse compósito. Utilizando RADIOSS, a lei que descreve esse tipo de material é a **Law 25 /MAT/COMPSh**. Mais uma vez, as informações que serão apresentadas nessa seção foram baseadas na metodologia utilizada pelo solver, logo, são baseadas no manual do solver RADIOSS (ENGINEERING, 2017).

A Lei 25 descreve o elemento shell utilizando a formulação de *Tsai-Wu*. Essa formulação basicamente assume que o material é elástico ortotrópico antes que critério de falha de *Tsai-Wu* seja atingido e o material se torna não linear depois desse limite. Portanto, o material é tratado como linear se:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{44}\sigma_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 < F(W_p, \dot{\varepsilon}) \quad (4.1)$$

Onde,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_{12}$  são as tensões no sistema de coordenadas do material. Os coeficientes do critério de *Tsai-Wu* são determinados a partir dos limites de tensão quando o material se torna não linear, nas direções 1, 2 ou 12 (cisalhamento) em compressão ou tração, como apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{\sigma_{1y}^c} + \frac{1}{\sigma_{1y}^t} \\ F_2 &= -\frac{1}{\sigma_{2y}^c} + \frac{1}{\sigma_{2y}^t} \\ F_{11} &= \frac{1}{\sigma_{1y}^c \sigma_{1y}^t} \\ F_{22} &= \frac{1}{\sigma_{2y}^c \sigma_{2y}^t} \\ F_{44} &= \frac{1}{\sigma_{12y}^c \sigma_{12y}^t} \\ F_{12} &= -\frac{\alpha}{2} \sqrt{F_{11}F_{22}} \end{aligned}$$

Os sub-indícios *c* and *t* representam compressão e tração, respectivamente, *y* representa o limite de escoamento e  $\alpha$  o fator de redução para o coeficiente  $F_{12}$ .  $F(W_p, \dot{\varepsilon})$  é o critério de falha de *Tsai-Wu* definido como função do trabalho plástico ( $W_p$ ) e da taxa de deformação verdadeira ( $\dot{\varepsilon}$ ).

$$F(W_p, \dot{\varepsilon}) = \left(1 + b\left(\frac{W_p}{W_p^{ref}}\right)^n\right) * \left(1 + c * \ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)\right)$$

com  $W_p^{ref}$  o trabalho plástico de referência,  $b$  o parâmetro de endurecimento plástico,  $n$  o expoente de endurecimento plástico,  $\dot{\varepsilon}_0$  a taxa de deformação verdadeira de referência, e  $c$  o coeficiente da taxa de deformação.

Danos entre  $\varepsilon_{ti}$  e  $\varepsilon_{fi}$  são controlados pelo mesmo fator de danos  $d_i$ , definido da seguinte forma:

$$d_i = \min\left(\frac{\varepsilon_{ti} - \varepsilon_i}{\varepsilon_i}, \frac{\varepsilon_{mi} - \varepsilon_{ti}}{\varepsilon_{mi} - \varepsilon_{ti}}, d_{max}\right)_{i(direções)=1,2}$$

$\varepsilon_t$  é a tensão de falha de tração na qual a tensão começa a reduzir,  $\varepsilon_f$  é a máxima tensão de tração para deletar o elemento,  $\varepsilon_m$  é a máxima tensão de tração em que a tensão do elemento é definida como zero (falha total). A tensão é reduzida de acordo com o parâmetro de dano  $\sigma_i^{reduced} = \sigma_i(1 - d_i)$ . O dano é reversível entre  $\varepsilon_{ti}$  e  $\varepsilon_{fi}$ . Quando  $\varepsilon_i > \varepsilon_{fi}$ , o dano é definido como  $d_{max}$  e não é mais atualizado.

De qualquer forma, esse método de falha não foi utilizado completamente, e outra formulação de falha foi associada ao material. Adotou-se esse procedimento porque  $W_p^{ref}$  é nulo para o material que será utilizado na fabricação do atenuador de impacto como foi explicado anteriormente no capítulo **Descrição do Material**. O material utilizado com referência apresenta um comportamento aproximadamente linear até atingir a tensão máxima antes da ruptura e, após esse limite, o dano no material atinge o valor máximo e o compósito em carbono falha, em outras palavras, depois do limite máximo mecânico, os elementos podem ser deletados e não desempenham mais função estrutural. Logo, ao definir-se  $W_p^{ref}$  igual a zero, define-se um valor infinito para o critério de falha de *Tsai-Wu* e o material apresentará um comportamento linear até a falha completa.

O critério de falha utilizado foi o critério de falha de *Chang* implementado no solver /FAIL/CHANG. E a falha para a ruptura da fibra é definida como:

- Modo de tração da fibra  $\sigma_{11} > 0$ :

$$e_f^2 = \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_1^t}\right)^2 + \beta\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^-}\right)^2 \quad (4.2)$$

onde  $\beta$  fator de escala de cisalhamento.

- Modo de compressão da fibra  $\sigma_{11} < 0$ :

$$e_c^2 = \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_1^c}\right)^2 \quad (4.3)$$

e o critério de falha para a fratura da matriz é:

- Modo de tração da matriz  $\sigma_{22} > 0$ :

$$e_m^2 = \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_2^t}\right)^2 + \beta\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^-}\right)^2 \quad (4.4)$$

- Modo de compressão da matriz  $\sigma_{22} < 0$ :

$$e_d^2 = \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{12}^-}\right)^2 + \left(\left(\frac{\sigma_2^c}{2\sigma_{12}^-}\right)^2 - 1\right)\frac{\sigma_{22}}{\sigma_2^c} + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^-}\right)^2 \quad (4.5)$$

Se o parâmetro de dano  $e_f^2, e_c^2, e_m^2$  ou  $e_d^2 \geq 1$  a tensão irá reduzir gradualmente antes que o elemento seja deletado, a redução é feita utilizando uma função exponencial para evitar instabilidades numéricas e reduzir a tensão gradualmente.

$$[\sigma(t)] = f(t)[\sigma_d(t_r)] \quad (4.6)$$

com,

$$f(t) = \exp\left(-\frac{t - t_r}{\tau_{max}}\right), t \geq t_r \quad (4.7)$$

onde,  $t$  é o tempo,  $t_r$  é o tempo em que a redução tem início quando o critério de dano é atingido,  $\tau_{max}$  é o tempo do decaimento dinâmico e  $[\sigma_d(t_r)]$  são os componentes de tensão no início do dano.

O valor de  $\tau_{max}$  determina o período de tempo após o critério de falha ser atingido em que as tensões no elemento danificado são gradualmente reduzidas à zero, e então, o elemento é deletado. Esse procedimento é necessário para evitar instabilidades decorrentes de uma remoção súbita do elemento e assim, problemas com os cálculos nos elementos vizinhos decorrentes de uma reação de falha em cadeia. Portanto, utilizando o decaimento dinâmico, o elemento não será deletado imediatamente mesmo que o critério de falha seja atingido. Valores normais para  $\tau_{max}$  são 10 vezes maiores que o "time step" atual e esse valor é definido diretamente no "card" do material.

O valor de dano  $D$  é  $0 \leq D \leq 1$  e é definido como:

$$D = \text{Max}(e_f^2, e_c^2, e_m^2, e_d^2) \quad (4.8)$$

A condição de falha do elemento é:

- Livre, se  $0 \leq D < 1$
- Falha, se  $D = 1$

Com base nessa formulação, o "card" do material foi preenchido da seguinte forma: (é importante notar que os valores utilizados na definição das propriedades do material são aqueles apresentados no capítulo *Descrição do Material*)

Símbolo	Nome	Valor
$\rho_i$	Densidade Inicial	$0.00184 \frac{g}{mm^3}$
$E_{11}$	Módulo de Young na direção 1	$265000 MPa$
$E_{22}$	Módulo de Young na direção 2	$265000 MPa$
$\mu_{12}$	Coeficiente de Poisson	0.1
$G_{12}$	Módulo de cisalhamento na direção 12	$220000 MPa$
$G_{23}$	Módulo de cisalhamento na direção 23	$220000 MPa$
$G_{31}$	Módulo de cisalhamento na direção 31	$220000 MPa$
$\sigma_{1yt}$	Tensão de escoamento em tração na direção 1	$2210 MPa$
$\sigma_{2yt}$	Tensão de escoamento em tração na direção 2	$2210 MPa$
$\sigma_{1yc}$	Tensão de escoamento em compressão na direção 1	$1080 MPa$
$\sigma_{2yc}$	Tensão de escoamento em compressão na direção 2	$1080 MPa$
$\sigma_{12yc}$	Tensão de escoamento em compressão na direção 12	$1420 MPa$
$\sigma_{12yt}$	Tensão de escoamento em tração na direção 12	$1420 MPa$

Tabela 4 – Valores para /MAT/COMPRESSH card

Símbolo	Nome	Valor
$\sigma_{1t}$	Resistência à tração longitudinal	$2210 MPa$
$\sigma_{2t}$	Resistência à tração transversal	$2210 MPa$
$\sigma_{12}$	Resistência à tração cisalhante	$1420 MPa$
$\sigma_{1c}$	Resistência à compressão longitudinal	$1080 MPa$
$\sigma_{2c}$	Resistência à compressão transversal	$1080 MPa$
$\tau_{max}$	Tempo de decaimento dinâmico	$10^{-6} ms$
$I_{fail_{sh}}$	Marcação para o modelo de falha do elemento shell	2

Tabela 5 – Valores para /FAIL/CHANG card

A marcação para o modelo de falha do elemento shell determina quando o elemento será deletado, no caso do atenuador de impacto, o elemento só deve ser desconsiderado depois que o dano atinja o limite em todas as camadas em tração ou compressão. Portanto, o valor 2 para  $I_{fail_{sh}}$  determina que "*Shell is deleted if damage is reached for fiber or matrix for all layers of shell*", ou seja, o elemento só será deletado após atingir o limite em todas as camadas.

## 4.4 Propriedade

Após a definição do material, é necessário definir agora a propriedade para todos os elementos. Como os elementos utilizados na malha são todos 2D, foi utilizada uma propriedade do tipo shell capaz de descrever a estrutura sanduíche do componente.

RADIOSS utiliza a propriedade /PROP/TYPE11 (SH\_SANDW) na definição da estrutura sanduíche dos elementos shell. É possível definir o componente com diversas camadas e cada camada com materiais, espessuras, posição e direção ortotrópica individuais.

Para o cumprimento das exigências das regras da SAE, foi necessário utilizar 13 camadas de carbono como será apresentado no próximo capítulo. Mais uma vez, utilizando as propriedades do material em sua forma comercial, cada camada possui uma espessura de 0.22 mm, portanto a espessura total da propriedade shell é 2.86 mm, distribuída da seguinte forma:

Ply	Orientação ( $\phi$ )	espessura ( $t$ )	Material
1	0 °	0.22	Carbono
2	0 °	0.22	Carbono
3	0 °	0.22	Carbono
4	45 °	0.22	Carbono
5	0 °	0.22	Carbono
6	0 °	0.22	Carbono
7	0 °	0.22	Carbono
8	45 °	0.22	Carbono
9	0 °	0.22	Carbono
10	0 °	0.22	Carbono
11	0 °	0.22	Carbono
12	45 °	0.22	Carbono
13	0 °	0.22	Carbono

Tabela 6 – Disposição das camadas de carbono

A propriedade /PROP/TYPE11 permite que o usuário defina a posição de cada camada ou então utilize o posicionamento automático, no caso analisado, o posicionamento dinâmico é suficiente porque as camadas não apresentam interferência, elas são colocadas juntas uma sobre a outra e ao definir-se a espessura total como a soma de cada camada individual, o software irá considerar todas as camadas posicionadas como mostrado na imagem 22.

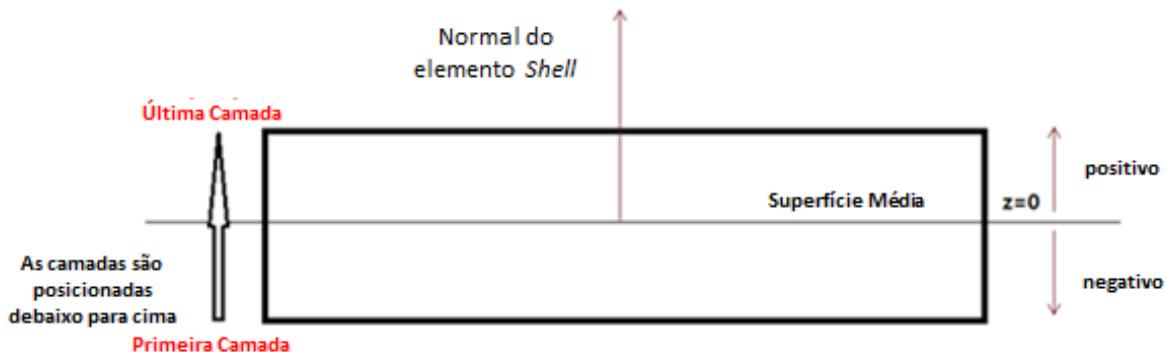


Figura 22 – Posições das camadas (ENGINEERING, 2016)

Outro ponto importante é entender como o solver interpreta a orientação das camadas, esse parâmetro representa a orientação das fibras do material compósito com base na orientação local de cada elemento. Foram utilizados dois sistemas de orientação para a

peça, o primeiro para os elementos na cor azul e o segundo para os elementos na cor vermelha, em ambos os casos, foram criados sistemas em que a orientação de zero graus correspondia a direção paralela a um dos eixos coordenados global. Definindo a orientação de  $45^\circ$ , as fibras são rotacionadas na direção normal ao elemento.

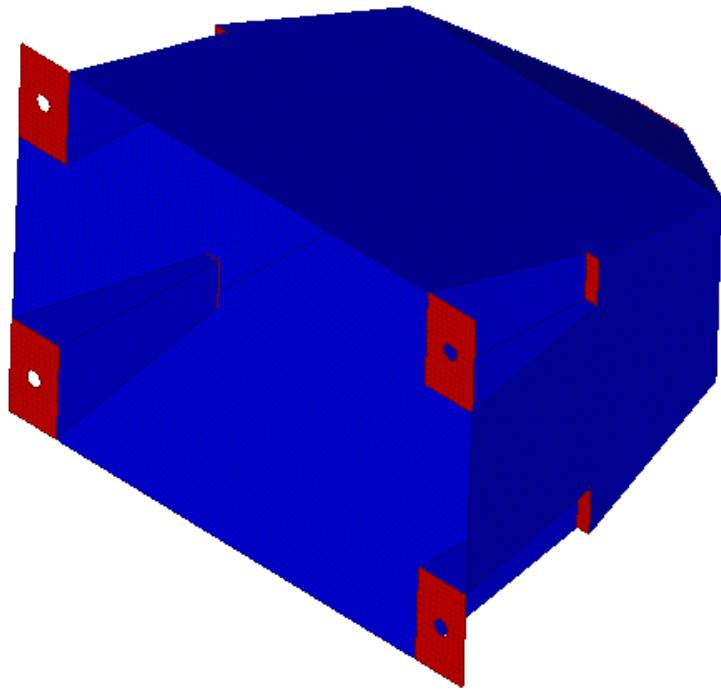


Figura 23 – Propriedades com orientações diferentes

A próxima figura 24 ilustra a orientação de referência ( $0^\circ$ ) para os elementos.

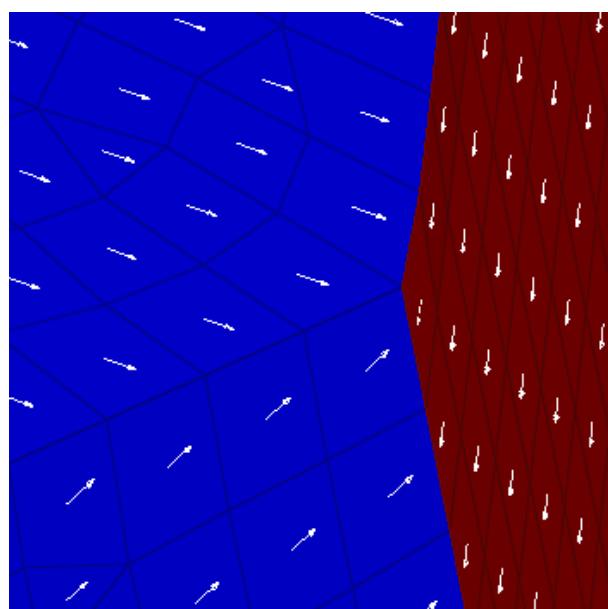


Figura 24 – Orientação de referência dos elementos

Já a imagem 25 exemplifica graficamente como a orientação é levada em conta durante o

cálculo, no exemplo existem 3 camadas, a primeira com 0.5 mm e  $-45^\circ$ , a segunda com 0.6 mm e  $90^\circ$  e a terceira com 0.5 mm e  $-45^\circ$  e, além disso, a orientação é feita no referencial externo e não no referencial global.

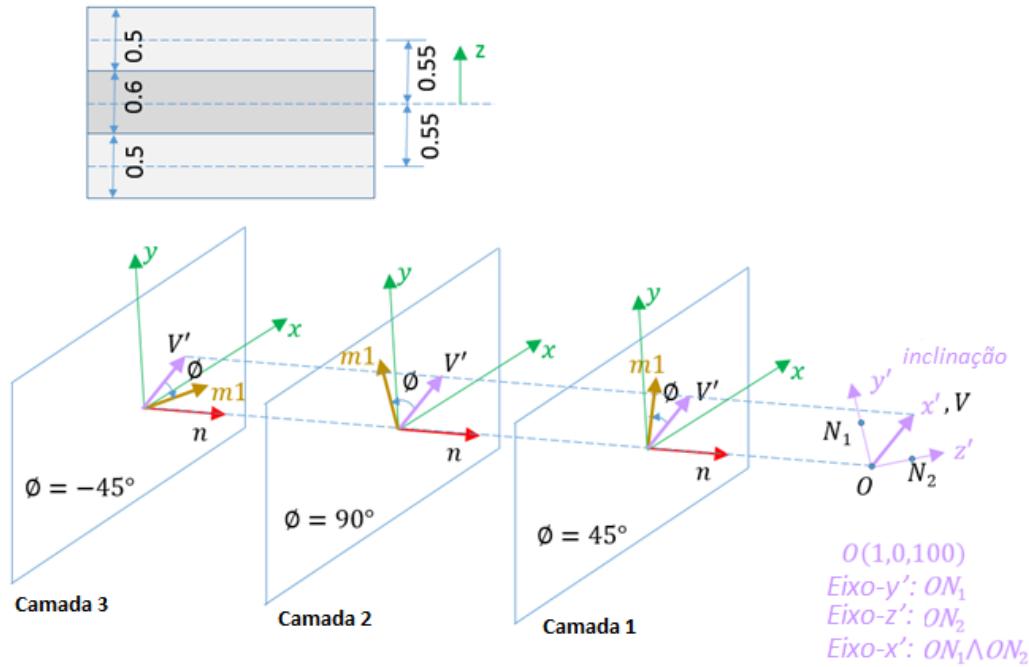


Figura 25 – Exemplo do posicionamento e orientação das camadas (layers) (ENGINEERING, 2016)

Após a definição das posições e orientações, os outros parâmetros relevantes são:

- $I_{shell}$  é a marcação para a formulação do elemento shell e define a método de integração do elemento, no caso do material ortotrópico, lei 25, os métodos QBAT e DKT18 devem ser utilizados, portanto  $I_{shell} = 12$ .

Os métodos QBAT e DKT18 são métodos de integração completos utilizados com materiais compósito que apresentam elevada precisão e custo computacional. QBAT é um método de integração completo de elementos com quatro nós com quatro pontos de integração de Gauss na superfície e são utilizados cinco graus de liberdade por nó garantindo que nenhum bloqueio de cisalhamento devido a integração reduzida no plano ocorra e, dessa forma, a deformação de cisalhamento transversal também é levada em conta. Já o método DKT18 é uma modificação da versão QBAT para elementos "trias" que possuem três pontos Hammer de integração.

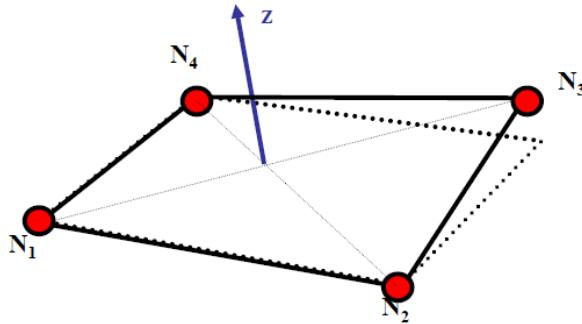


Figura 26 – Método de integração completo para elementos com quatro nós (ENGINEERING, 2016)

- $I_{strain}$  é definido como um, valor padrão que significa que as tensões dos elementos shell serão computadas para o pós-processamento.
- $I_{thick}$  é a marcação para o cálculo das tensões resultantes no elemento. Define-se que a mudança de espessura do elemento deve ser levada em conta para o cálculo das tensões resultantes. No caso analisado, como o critério de falha leva em conta os danos em todas as camadas do material, a variação da espessura do elemento deve ser levada em conta, pois alguns layers podem ser alterados antes da completa exclusão do elemento. Logo,  $I_{thick} = 1$ .
- $I_{plas}$  é a marcação para a plasticidade planar das tensões do elemento. O valor deve ser igual a 1, se  $I_{thick}$  foi definido como 1 e significa que a plasticidade planar do elemento será calculada por um processo iterativo com projeções utilizando três iterações de Newton. Esse cálculo torna o resultado mais preciso, no entanto, o custo computacional é elevado.

## 4.5 Interface de contato

O próximo passo é a definição da interação entre todos os elementos. No problema de impacto, essa definição é relevante para garantir que o movimento de um elemento influencie o movimento dos elementos adjacentes já que trata-se de um problema de grandes deformações. No modelo foi utilizado a interface do tipo 7, /INTER/TYPE7. A interface do tipo 7 é uma interface de impacto de uso múltiplo, que modela o contato entre uma superfície independente ("master") e um grupo de nós dependentes ("slaves") e no modelo foi definido o contato entre todos os elementos.

Fazendo uso desse "card":

- Um nó pode ser ao mesmo tempo dependente e independente, o que é útil para o caso de um "auto-impacto" (elementos do mesmo componente chocando-se entre si)
- Cada nó escravo pode impactar cada segmento independente.

- Um mesmo nó pode impactar mais de um segmento.
- Um mesmo nó pode impactar em dois lados opostos, nas bordas e nos cantos de cada segmento.

RADIOSS utiliza o método de penalidade no cálculo das interfaces de contato, esse método considera a interação entre nós dependentes e segmentos independentes como molas que produzem uma força resistiva contrária à penetração e função do valor da penetração.

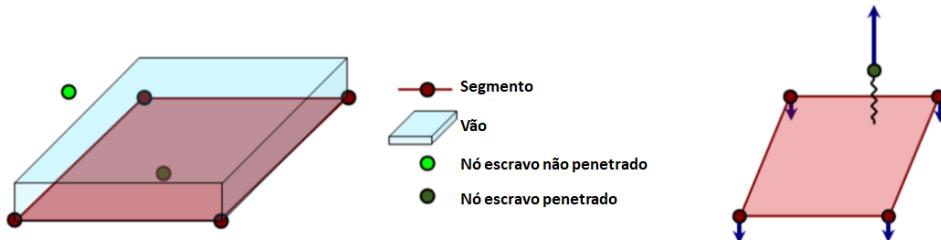


Figura 27 – Método de Penalidades (ENGINEERING, 2016)

Elementos de mola são criados entre o nó dependente e sua projeção. A rigidez da mola é computada automaticamente de acordo com o material e as propriedades de segmento independente e dos nós dependentes.

A interface do tipo 7 utiliza o método de penalidades com rigidez variável. Um espaço é definido em torno do segmento independente e em torno do nó dependente e uma força resistiva irá atuar quando o nó penetrar no espaço definido pelo segmento, as forças tentam manter o nó fora do "gap" do contato.

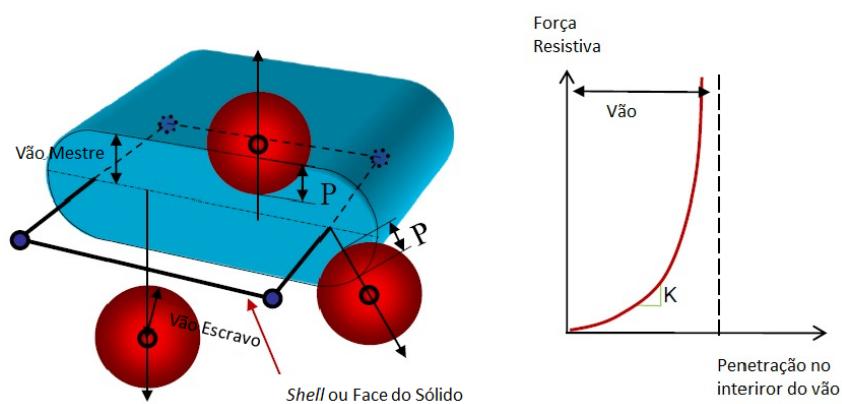


Figura 28 – Vãos do contato e força resistiva (ENGINEERING, 2016)

Os seguintes parâmetros determinam como a interface será definida:

- $I_{gap}$  determina como a dimensão do "gap" é calculado. No modelo foi utilizado  $I_{gap} = 3$  que significa que o "gap" é variável com uma fator de escala e correção do tamanho da malha.

O "gap" variável é dado por  $\max[Gap_{min}, \min[Fscale_{gap} * (g_s + g_m), \%mesh\_size * (g_{s\_1} + g_{s\_2}), Gap_{max}]]$ .

Onde,

$Gap_{min} = \min(t_m, \frac{l_{min}}{2})$ , com  $t_m$  a espessura média dos elementos independentes e  $l_{min}$  o comprimento do menor lado entre todos os segmentos independentes.

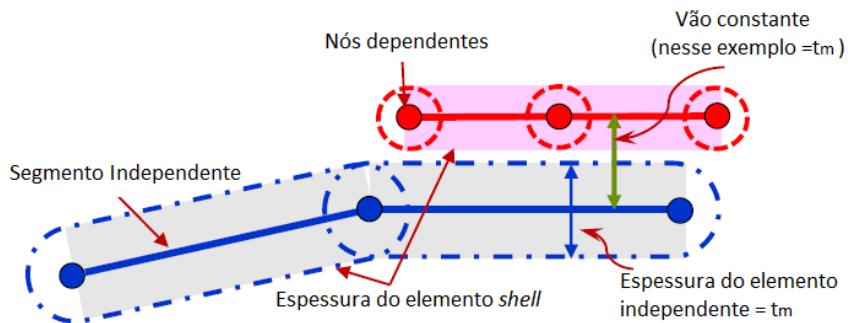


Figura 29 – Definição do  $Gap_{min}$  (ENGINEERING, 2016)

$g_m = \frac{t_m}{2}$  com  $t_m$  a espessura dos elementos independentes e  $g_s = \frac{t_s}{2}$  com  $t_m$  a maior espessura do elemento conectado ao nó dependente.

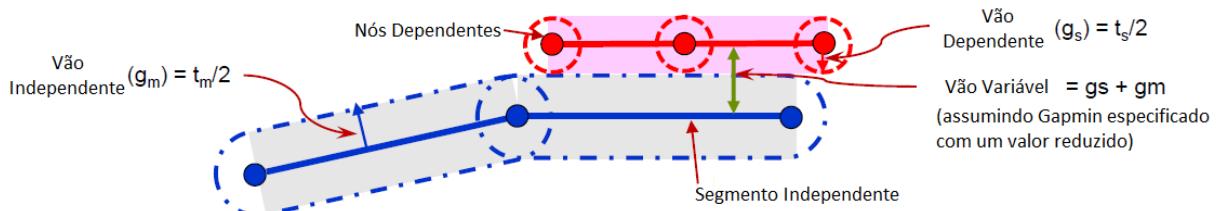


Figura 30 – Definição de  $G_m + G_s$  (ENGINEERING, 2016)

$F_{scale}$  é o fator de escala que multiplica  $(g_s + g_m)$  e definido como 0.9.  $g_{m\_1}$  é o comprimento da menor aresta dos elementos independentes,  $g_{s\_1}$  é o comprimento da menor aresta do elemento conectado ao nó dependente e  $\%mesh\_size$  é a porcentagem do tamanho da malha definido pelo valor padrão 0.4.

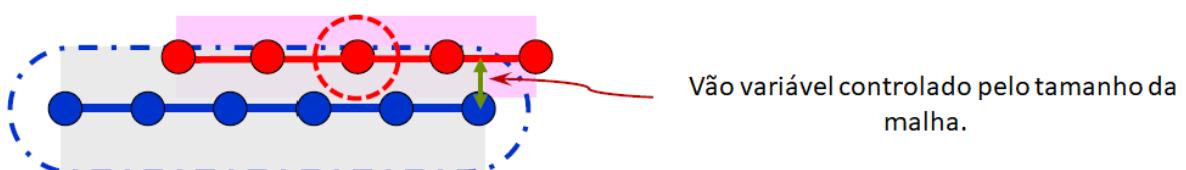


Figura 31 – Definição de  $G_m + G_s$  (ENGINEERING, 2016)

Finalmente,  $Gap_{max}$  é o maior vão definido na simulação e é utilizado como 3.0 que é o tamanho dos elementos da malha.

- $I_{nacti}$  Define a ação a ser tomada em caso de penetração inicial, essa opção permite que o usuário defina como a penetração inicial deve ser ignorada caso ela exista, no modelo, foi utilizado  $I_{nacti} = 0$ , o que significa que o solver não precisa realizar nenhuma ação, porém, se existir alguma interferência inicial, o solver irá retornar uma mensagem de erro. Essa é a melhor opção e acelera o cálculo, mas exige um controle da penetração inicial como será explicado na próxima seção **Análise da penetração inicial**.
- $I_{stf}$  Define como a rigidez da interface de contato é calculada. A força resistiva é não linear e varia de acordo com a penetração do nó dependente no vão ("gap") e é função do valor e taxa da penetração.

A força resistiva é definida por:

$$F = K * P + c \frac{dP}{dt} \quad (4.9)$$

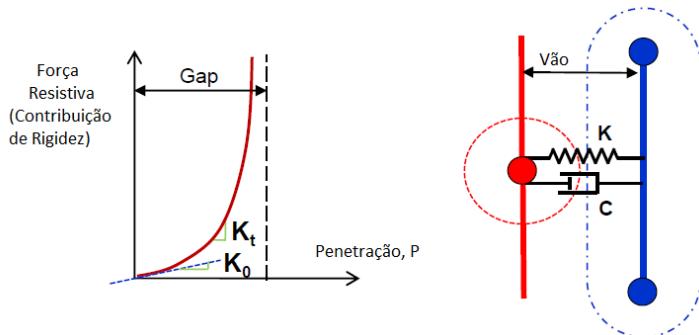


Figura 32 – Força Resistiva X Penetração (ENGINEERING, 2016)

Onde:

$P$  é a penetração,

$$K = K_0 \frac{\text{Gap}}{\text{Gap} - P},$$

$$C = VIS_s \sqrt{2K_m},$$

$VIS_s$  é o coeficiente de amortecimento crítico na rigidez da interface do contato e, tem como valor padrão 0.05,  $K_m = St_{fac} * 0.5 * E * t_m$  quando o segmento independente está em um elemento sendo  $St_{fac}$  o fator de escala da rigidez que varia entre  $St_{min}$  e  $St_{max}$  de acordo com o valor da penetração e por fim,  $E$  é o limite de escoamento do material dos elementos shell.

A rigidez instantânea é calculada como

$$K_t = \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{K * \text{Gap}^2}{(\text{Gap} - P)^2} \quad (4.10)$$

Onde,  $K_0$  é definido pelo valor de  $I_{stf}$ , no modelo foi definido como 4,  $K = \min(K_m, K_s)$ , logo,  $K_0$  é o valor mínimo entre  $K_m$  e  $K_s$  com  $K_s = St_{fac} * 0.5 * E * t_s$  quando o nó está conectado ao elemento.

- $I_{form}$  é a formulação de atrito e define como as forças de deslizamento são calculadas no contato. Pode-se utilizar a formulação viscosa ou de rigidez, no caso de impactos à elevadas velocidades, é recomendado o uso da formulação viscosa, portanto,  $I_{form}$  é igual a um o que significa que as forças de deslizamento do atrito são definidas como:

$$F_t = \min(\mu F_n, F_{adh}) \quad (4.11)$$

Com  $\mu$  o coeficiente de atrito e  $F_n$  a força normal, no modelo foi desconsiderado o atrito entre os elementos do componente, logo  $F_t$  é sempre calculada como:

$$F_t = F_{adh} = C * V_t \quad (4.12)$$

onde  $V_t$  é a velocidade tangencial de contato,  $C = VIS_F * \sqrt{2K_m}$  e  $VIS_F$  é o coeficiente de amortecimento crítico definido como 1.0.

## 4.6 Análise da penetração inicial

Como destacado na seção anterior, é importante conferir a existência de penetrações iniciais, pois, caso elas estejam presentes, a análise numérica não pode ser realizada, ou, se realizada utilizando as ferramentas da interface de contato descritas anteriormente e relacionadas ao valor de  $I_{nacti}$ , os cálculos tornam-se mais lentos.

No caso do "auto-impacto", que trata-se do caso analisado, existirá uma penetração inicial quando o valor do vão ("gap") calculado é maior que o tamanho da malha como apresentado na imagem 33. HyperCrash possui uma ferramenta para conferir essa condição antes do início da simulação.

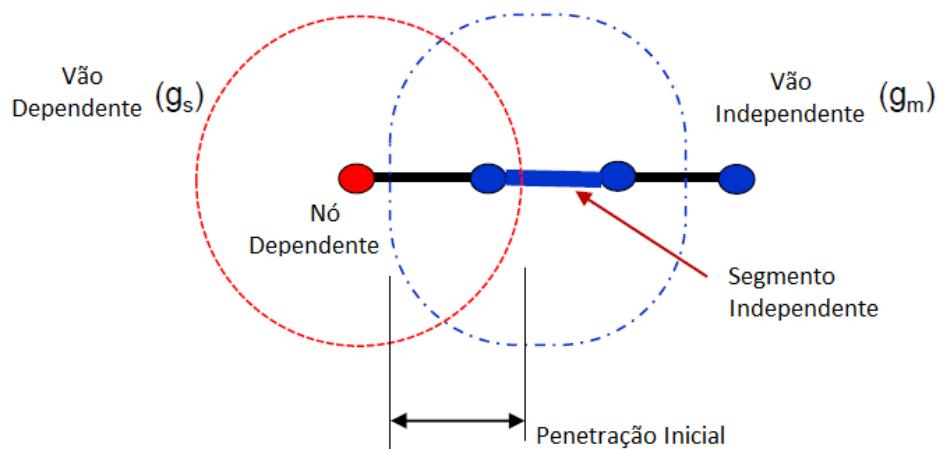


Figura 33 – Controle da definição de "gap" utilizando o tamanho da malha (ENGINEERING, 2016)

A malha foi ajustada de forma a cancelar todas as penetrações iniciais e manter a qualidade dos elementos como descrito na primeira seção desse capítulo.

A seguinte imagem ??ilustra os resultados obtidos para o modelo utilizando o software HyperCrash.

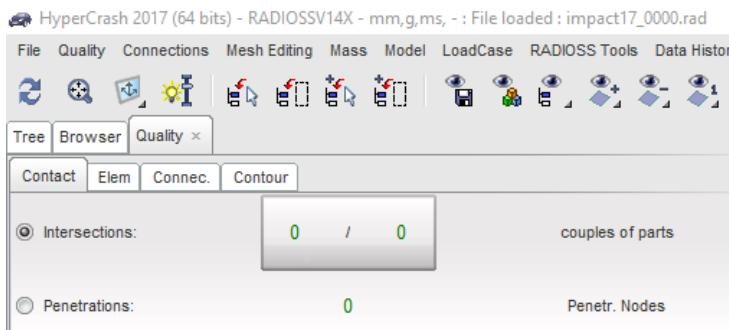


Figura 34 – Controle da Penetração e Intersecção Inicial

## 4.7 Control Cards

Depois de definir todos os parâmetros relacionados à malha do modelo, é preciso definir quais resultados o solver deve produzir e gravar para análises de pós-processamento. Nessa seção são descritos todos os "cards" utilizados e os resultados associados à eles.

- /ANIM/DT - Define o tempo inicial e a frequência para o registro dos resultados de animação 3D. Foi utilizado 0ms como tempo inicial e  $0.5ms^{-1}$  como frequência de resultados, o que significa que um resultado de animação é gerado a cada 0.5 ms de simulação.
- /ANIM/MASS - Produz resultados de animação contendo massas nodais.
- /ANIM/MAT - Produz resultados de animação com uma parte para cada material, no caso, os resultados terão apenas uma parte definida pelo material de fibra de carbono.
- /ANIM/SHELL/EPSP - Produz resultados de animação contendo deformações plásticas determinadas para cada ponto de integração do elemento shell.
- /MON - É definido automaticamente quando a história temporal de uma parte é ativada.
- /RUN/Run Name/Run Number /Restart Letter - Identifica o número da simulação e o tempo final.
- /TFILE - Define a frequência em que os resultados da história temporal das partes devem ser registrados e também o tipo de arquivo que deve ser produzido, no estudo foi gerado arquivos binários IEEE 32-bit que podem ser analisados no software HyperGraph. A frequência temporal foi definida como zero de forma que o solver registre os resultados após cada iteração temporal.

- /VERS Definido automaticamente, define a versão do RADIOSS dos dados de entrada, nesse caso, foi utilizada a versão 2017.
- /ANIM/VECT Produz resultados de animação contendo dados vetoriais de variáveis especiais. Foram requeridos os seguintes resultados:
  - Acelerações
  - Forças de Contato
  - Deslocamentos
  - Forças Internas
  - Velocidades
  - Forças Externas
- /ANIM/NODA Produz resultados contendo dados escalares da massa nodal. Os seguintes resultados foram requeridos:
  - Time step nodal
  - Variação do tempo nodal
- /ANIM/SHELL/FAIL - Produz resultados contendo as camadas que falharam
- /ANIM/SHELL/THIC - Produz resultados contendo a espessura dos elementos
- /ANIM/SHELL/VONM - Produz resultados contendo tensão de von Misses dos elementos
- /ANIM/ELEM/ENER - Produz resultados contendo a densidade de energia (energia interna dividida pela massa do elemento)
- /ANIM/SHELL/TENS/STRESS/ALL - Produz resultados contendo o tensor de tensões para todas as camadas
- /ANIM/SHELL/TENS/STRAIN/ALL - Produz resultados contendo o tensor de deformações para todas as camadas
- /ANIM/SHELL/TENS/EPSDOT/ALL - Produz resultados contendo o tensor de taxas de deformação para todas as camadas

Todos os resultados de animação podem ser analisados utilizando o software HyperView. Outro requerimento importante é a história temporal das partes que irá registrar em arquivos binários IEEE 32-bit os resultados obtidos para cada componente existente no modelo. Na análise de impacto estudada, foram requeridos os resultados para

- Atenuador de Impacto

- Acelerômetro
- Rígidos
- Parede Rígida
- Interfaces de contato

Essas saídas permitem a visualização dos resultados relacionados aos componentes na forma de gráficos utilizando o software HyperGraph. Para exemplificar, esses arquivos irão registrar resultados para a energia interna, energia cinética, quantidade de movimento nas direções X, Y e Z, energia total, energia hourglass, velocidades nas direções X, Y e Z para o atenuador de impacto durante todo o tempo de simulação e permite um estudo detalhado dos resultados.

# 5 Simulação de Impacto

## 5.1 Descrição do Modelo

A simulação numérica de impacto do atenuador é feita simulando o impacto do atenuador contra uma parede rígida com velocidade inicial controlada como ilustrado na imagem 35.

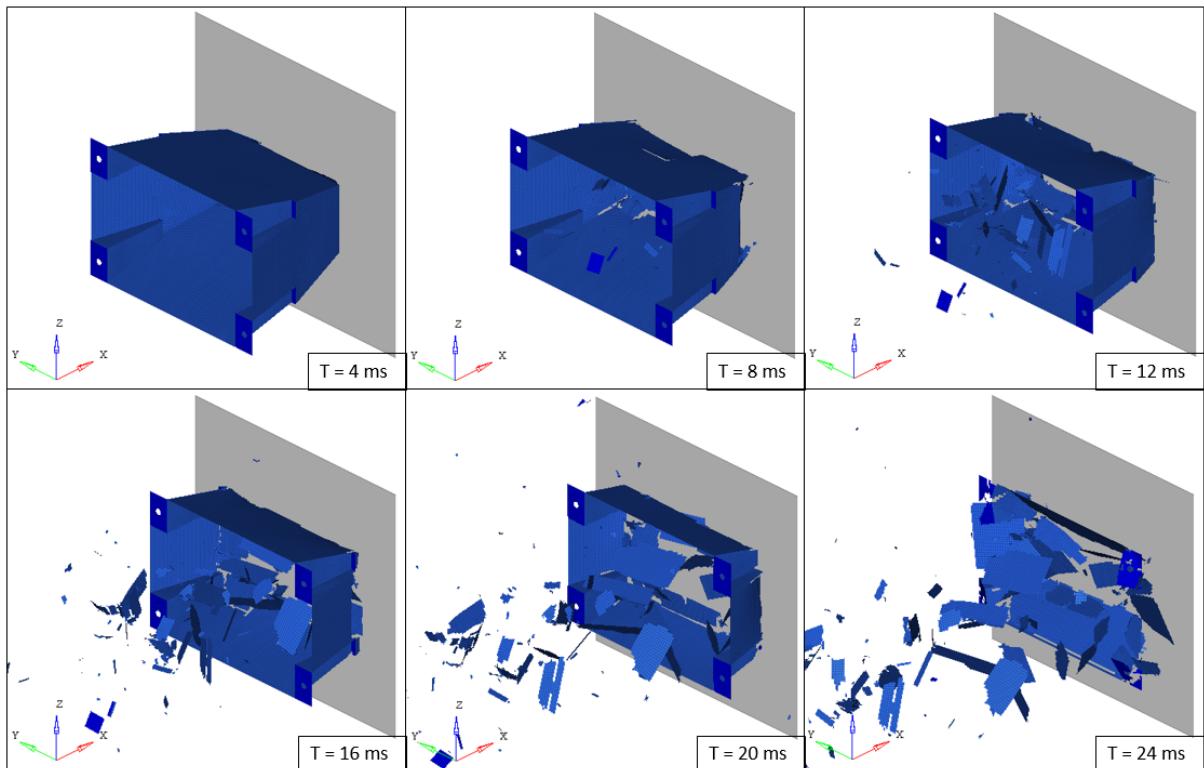


Figura 35 – Simulação de Impacto

Como citado anteriormente, o modelo foi definido utilizando o software HyperCrash como ilustrado na image 36.

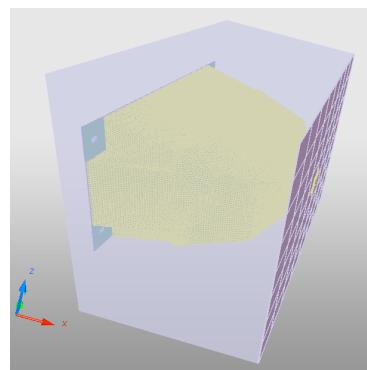


Figura 36 – Modelo numérico no HyperCrash

Os seguintes elementos foram utilizados no modelo:

- Rigid wall - uma parede rígida infinita foi adicionada à frente do atenuador de forma a receber e sentir o impacto. A parede rígida possui sua própria definição de interface de contato sendo necessário apenas especificar a distância para a determinação dos nós dependentes, foi definido o valor de 260 mm de forma a incluir todos os nós do atenuador de impacto com exceção dos nós onde foi aplicado a massa rígida. O envoltório em torno do atenuador que pode ser visto na imagem 36 é a representação do volume utilizado para definir os nós dependentes para a interface de contato da parede.
- Rrigids - São os elementos utilizados para transferir cargas de uma parte à outra, eles são tratadas matematicamente com rigidez infinita e não sofrem deformações, além disso, o elemento carrega propriedades iniciais e foi utilizado para simular a massa de impacto contra a qual o atenuador deve resistir e absorver energia. Dois valores foram utilizados como será explicado na próxima seção. O nó independente (master) é o nó que carrega a massa e foi definido na posição central do plano YZ.

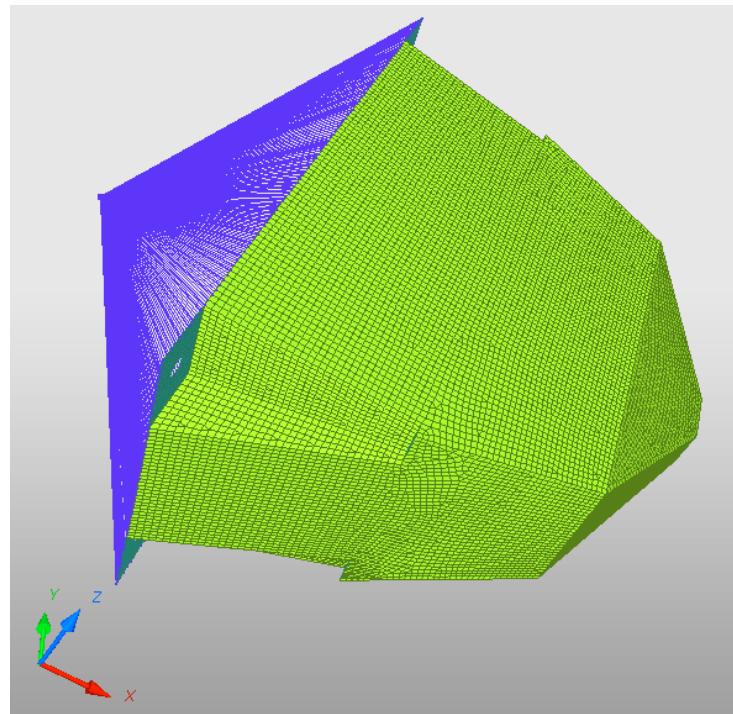


Figura 37 – Elementos rígidos associados ao componente

Outro parâmetro que deve ser definido para a "card" do elemento rígido é a marcação *Icog* que define o cálculo do centro de gravidade do elemento. Podem ser usadas as seguintes opções:

- *Icog = 1* - O centro de gravidade é computado utilizando o nó independente (master) e os nós dependentes (slave), uma nova posição é estabelecida após

cada iteração. A massa total do elemento rígido levada em conta é a massa total definida para o elemento mais a massa dos nós dependentes.

- $Icog = 2$  - O centro de gravidade é computado utilizando apenas os nós dependentes (slave), uma nova posição é estabelecida após cada iteração. A massa total do elemento rígido levada em conta é a massa total definida para o elemento mais a massa dos nós dependentes.
- $Icog = 3$  - O centro de gravidade é colocado sobre o nó independente (master) e não se altera durante toda a simulação. A massa total do elemento rígido levada em conta é a massa total definida para o elemento mais a massa dos nós dependentes.
- $Icog = 4$  - O centro de gravidade é colocado sobre o nó independente (master) e não se altera durante toda a simulação. A massa total do elemento rígido levada em conta é apenas a massa total definida para o elemento.

Para simular a massa concentrada que atua sobre o atenuador, foi utilizada a opção  $Icog = 3$ , dessa forma, o centro de gravidade é sempre o nó independente e as propriedades iniciais são sempre constantes e automaticamente definidas pela posição do nós dependentes que são os nós das condições de contorno do componente, dessa forma, evita-se a indução momentos provocados pela massa de impacto.

## 5.2 Condições iniciais de contorno

A única condição de contorno imposta ao movimento foi a velocidade inicial na direção  $X$  global contrária a parede de impacto, dois valores foram utilizados como será demonstrado na próxima seção. As velocidades são impostas para os nós do componentes, portanto, todos os nós do atenuador mais o nó independente do elemento rígido foram submetidos à velocidades iniciais constantes na direção  $X$ . Vale a pena destacar que todos os nós envolvidos na análise devem receber a velocidade inicial e não apenas o nó independente do elemento rígido, se não, os nós do atenuador irão sentir o impacto do movimento do componente rígido e irão sofrer deformação antes mesmo do impacto contra a parede rígida.

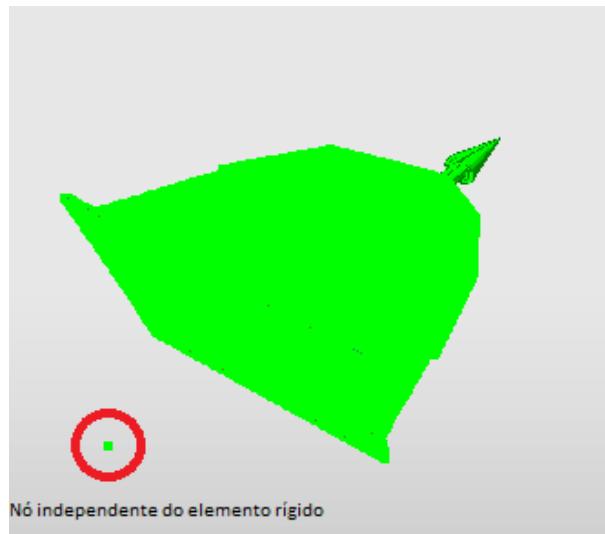


Figura 38 – Definição da velocidade inicial no HyperCrash

Um acelerômetro foi adicionado ao nó independente do elemento rígido com a mesma orientação do sistema de coordenadas global. O objetivo é calcular a aceleração do atenuador para analisar a correspondência com as exigências das regras da SAE .

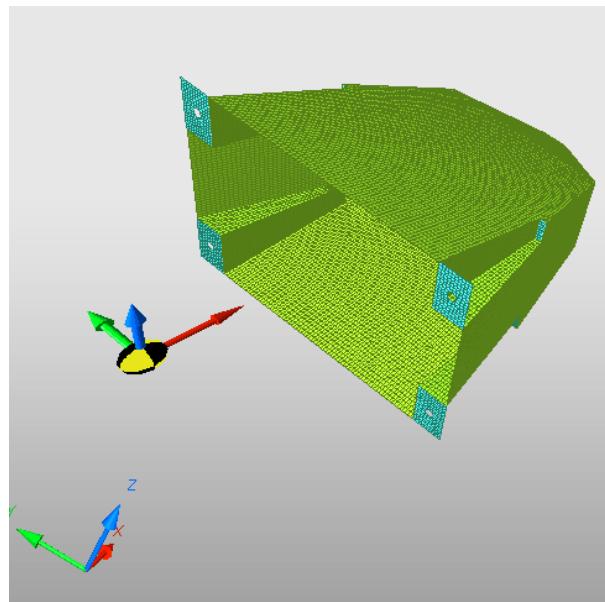


Figura 39 – Definição do acelerômetro no HyperCrash

### 5.3 Resultados

Como trata-se de um projeto preliminar e existem algumas incertezas nas definições do modelo, como por exemplo, as definições de alguns parâmetros dos cards de material e interface de contato, duas análises foram realizadas impondo-se condições iniciais diferentes, porém mantendo a energia inicial aproximadamente constante. Ambos os casos utilizaram valores iniciais nos quais a energia inicial é aproximadamente o dobro do valor

que o atenuador deve absorver para atender as exigências mínimas da regra. Portanto as duas análises podem ser caracterizadas por:

- Aumento da energia pela massa
- Aumento da energia pela velocidade

Os dois modelos foram adotados para observar o comportamento diferente do material quando sujeito a diferentes taxas de deformações e também analisar os parâmetros de segurança relacionados sobretudo aos valores máximos e médios de aceleração.

### 5.3.1 1 - Aumento da massa

O primeiro caso foi realizado com as seguintes condições iniciais:

- Massa do elemento rígido: 600kg
- Velocidade inicial  $7\frac{m}{s} = 7\frac{mm}{ms}$

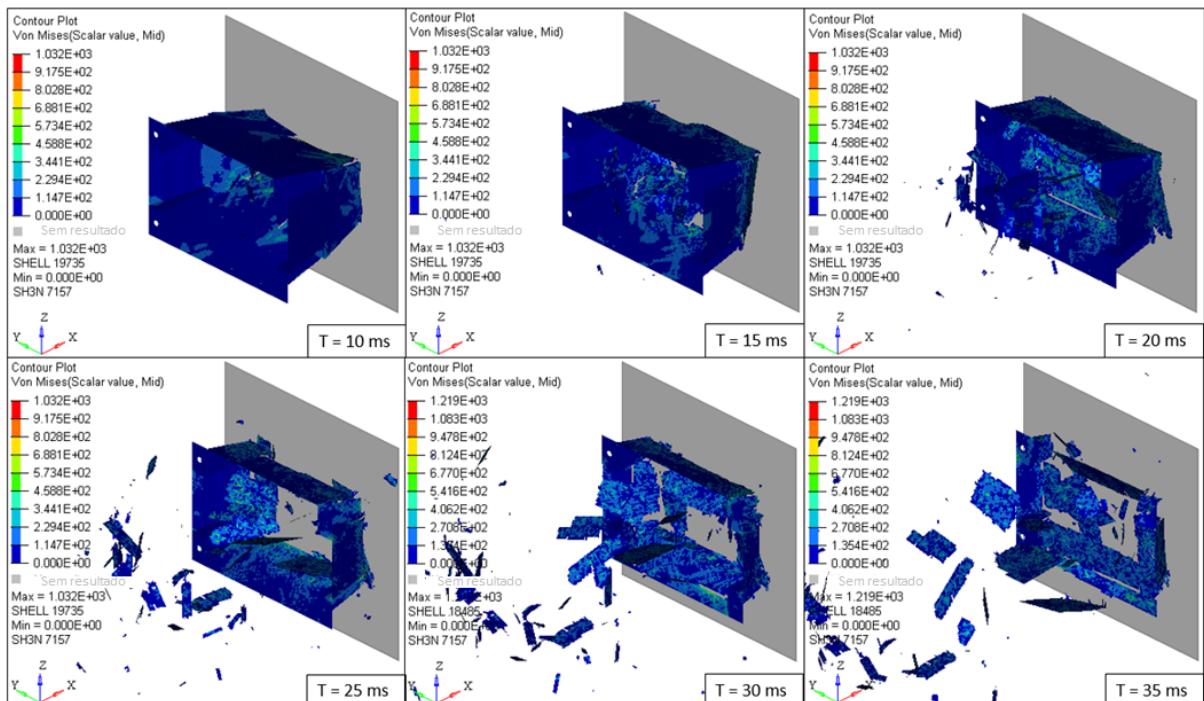


Figura 40 – Resultado para o caso 1 com plot das tensões de von Misses

#### 5.3.1.1 Análise da energia

O primeiro aspecto a ser analisado é a conservação da energia durante os cálculos.

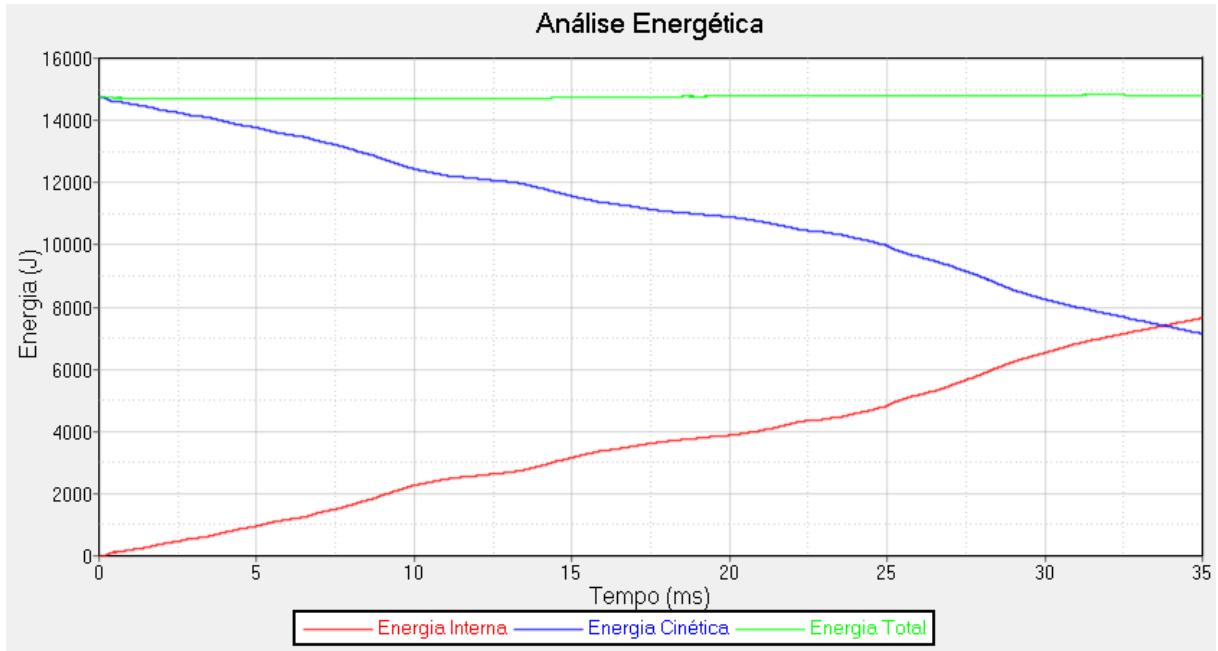


Figura 41 – Conservação de Energia para o primeiro caso

É imediato notar a conservação de energia, a energia total é constante e a energia cinética inicial é transformada gradualmente em energia interna absorvida pelo atenuador. A energia interna refere-se à energia absorvida pelo material do atenuador de impacto e o próximo gráfico isola esse valor.

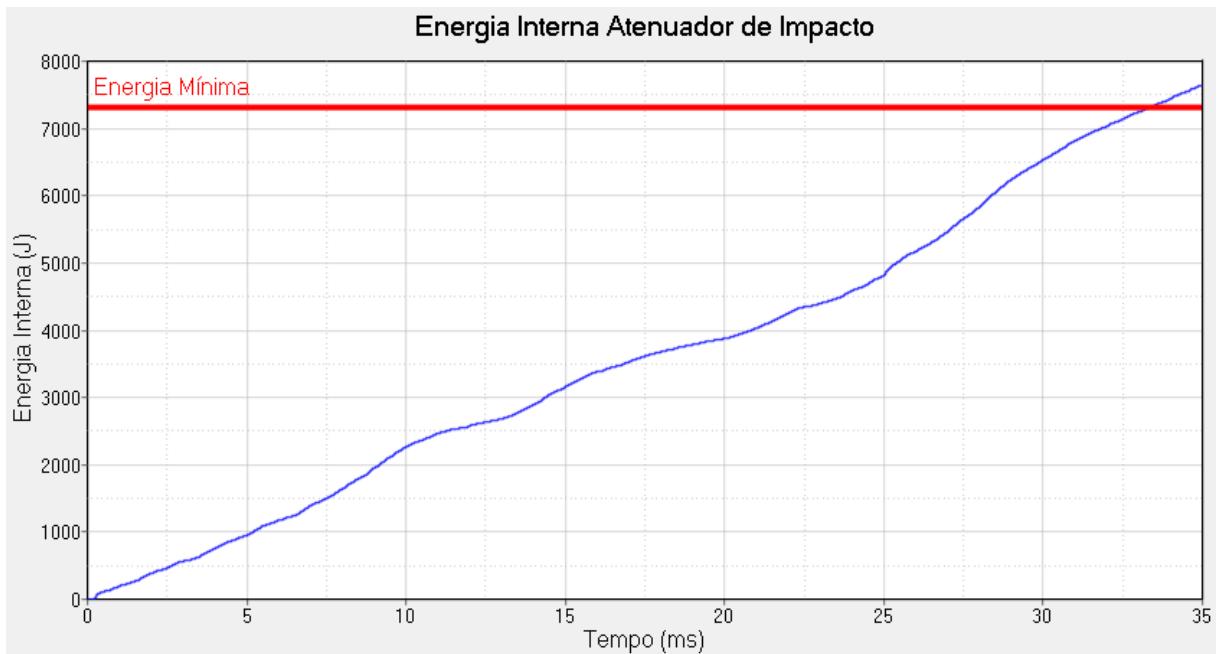


Figura 42 – Energia Interna Atenuador de Impacto

### 5.3.1.2 Análise da aceleração

O outro parâmetro que deve ser analisado é o pico de desaceleração e o valor médio da aceleração durante o impacto.

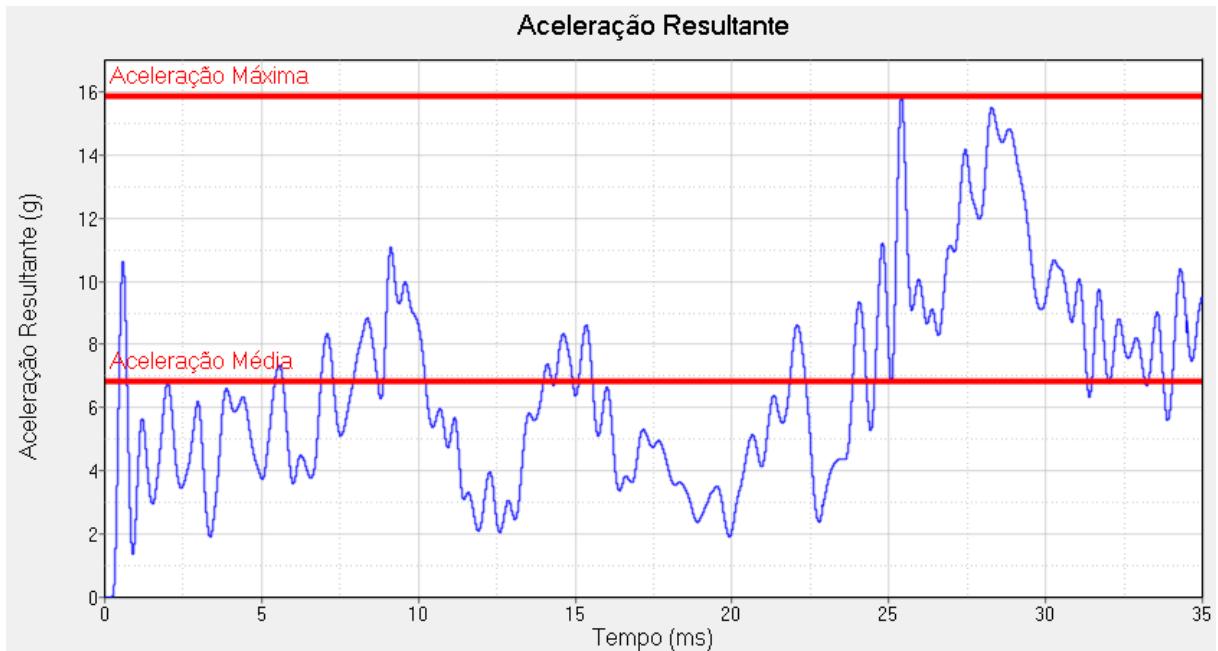


Figura 43 – Aceleração resultante para o primeiro caso

### 5.3.1.3 Análise do intervalo de integração

O último parâmetro que deve ser observado para validar os cálculos obtidos é a evolução temporal do "time step", esse valor não deve sofrer variações rápidas e acentuadas, caso isso aconteça, é necessário verificar a geometria dos elementos bem como a definição do material. No manual de utilização do RADIOSS é recomendado que a máxima variação não deve superar o valor de dez vezes o valor inicial.



Figura 44 – Time step para o primeiro caso

A variação máxima foi de  $7.23 \cdot 10^{-5}$  que é menor que  $10^{-4}$ , portanto as reduções acentuadas são pequenas o suficiente para confirmar a validade dos cálculos.

Parâmetro	Exigência	Valor Obtido	Condição
Energia absorvida	7350 J (min)	7642 J	Verificada
Aceleração Máxima	40 g (max)	15.9 g	Verificada
Aceleração Média	20 g (max)	6.9 g	Verificada

Tabela 7 – Resultados para o primeiro caso

### 5.3.2 2- Aumento da velocidade

O segundo caso foi realizado com as seguintes condições iniciais:

- Massa do elemento rígido: 300 kg
- Velocidade inicial:  $10 \frac{m}{s} = 10 \frac{mm}{ms}$

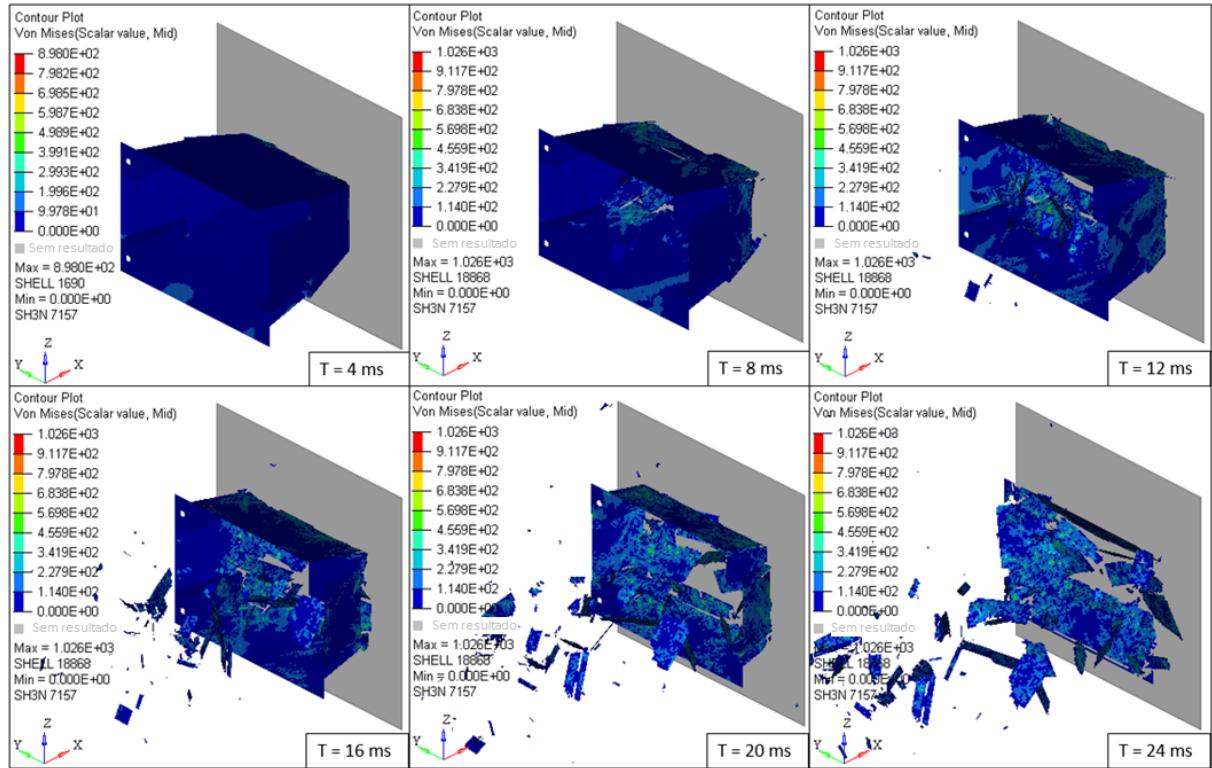


Figura 45 – Resultado para o caso 2 com plot das tensões de von Misses

### 5.3.2.1 Análise da energia

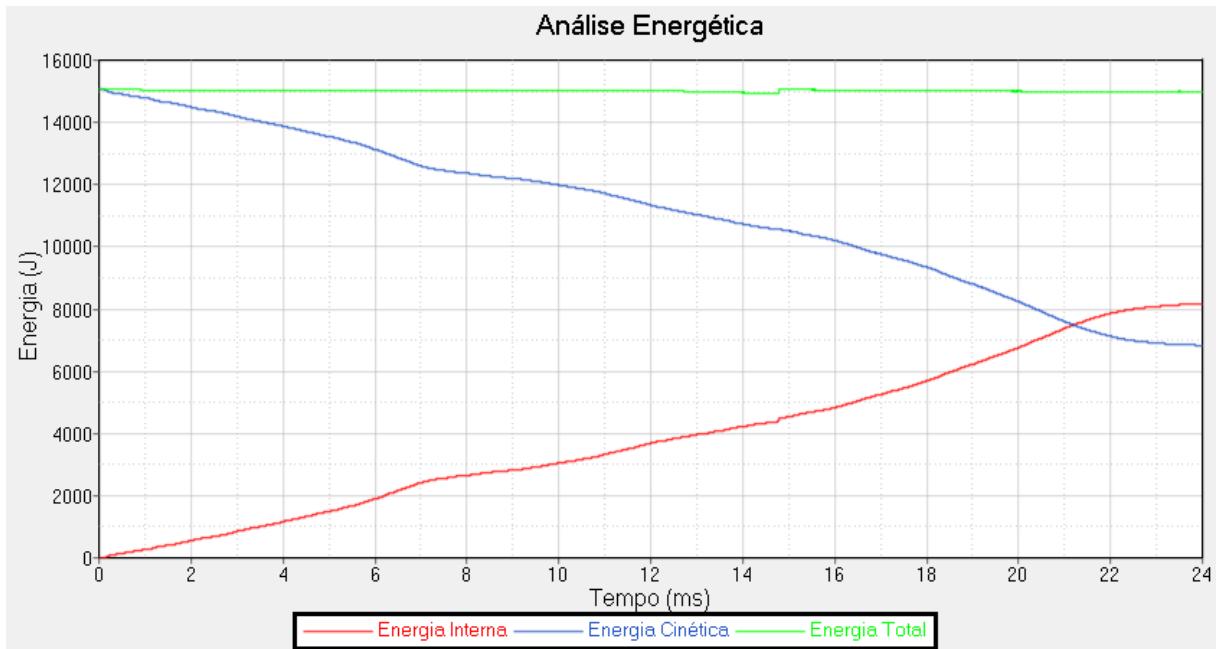


Figura 46 – Conservação de Energia para o segundo caso

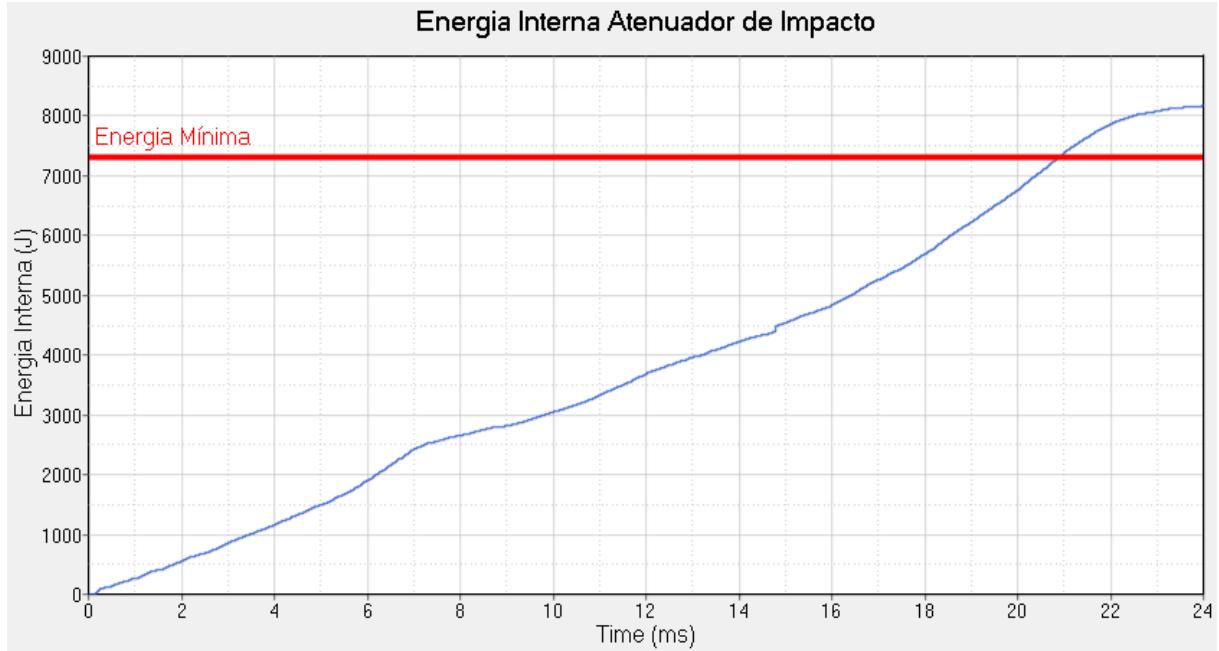


Figura 47 – Energia Interna Atenuador de Impacto

### 5.3.2.2 Análise da Aceleração

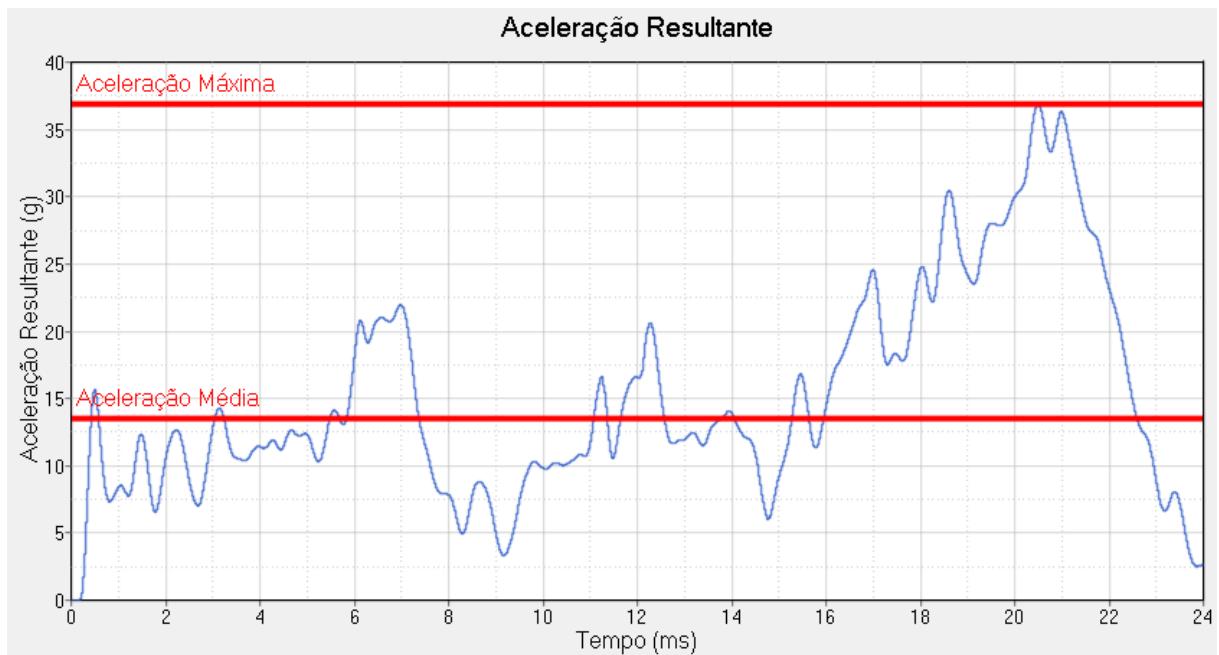


Figura 48 – Aceleração resultante para o segundo caso

### 5.3.2.3 Análise do intervalo de integração

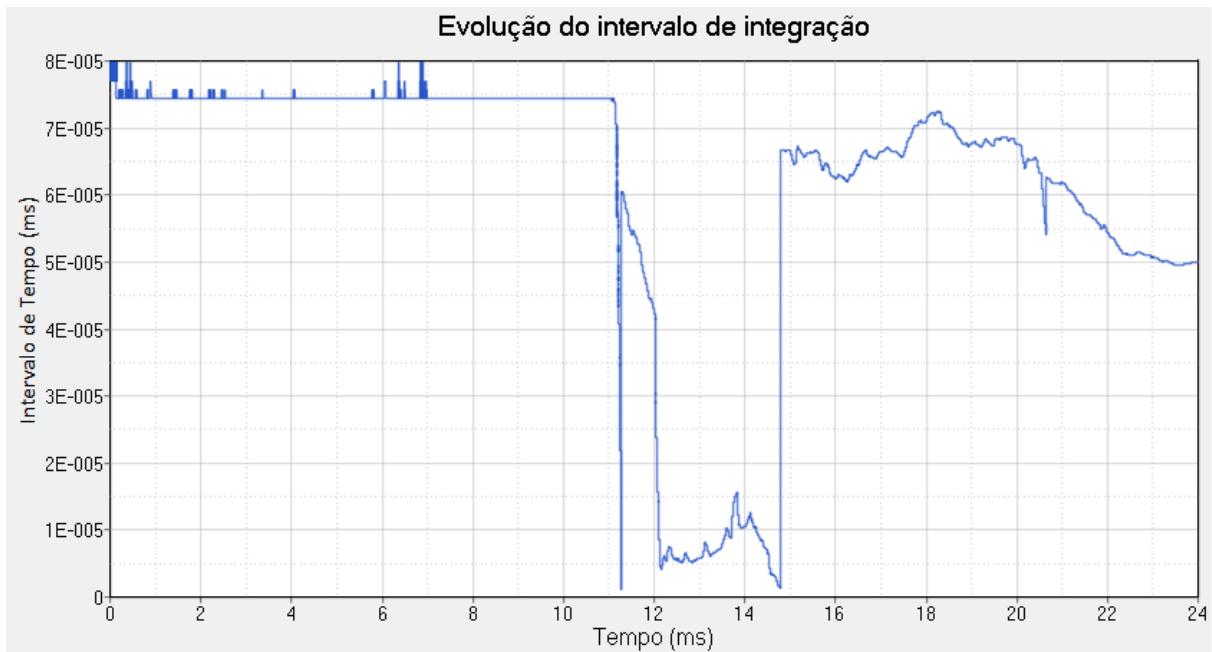


Figura 49 – Time step para o segundo caso

Parâmetro	Exigência	Valor Obtido	Condição
Energia absorvida	7350 J (min)	8166 J	Verificada
Aceleração Máxima	40 g (max)	36.9 g	Verificada
Aceleração Média	20 g (max)	13.6 g	Verificada

Tabela 8 – Resultados para o segundo caso

Realizando as mesmas análises feita para o caso 1, é possível observar que o caso 2 também atende a todos os requisitos e representa um caso mais crítico, principalmente para os valores de aceleração resultante, porém, mesmo nesse caso, as acelerações de pico e média estão dentro dos valores limites, logo, fica evidente a possibilidade de se utilizar um atenuador de impacto feito com fibra de carbono em um veículo de fórmula SAE.

# 6 Conclusões e Sugestões

## 6.1 Conclusões

A simulação mostrou ser possível utilizar um atenuador de impacto feito completamente em fibra de carbono. A massa total do atenuador com 13 camadas de material é de aproximadamente 1 kg (1040), cerca de 180 gramas mais leve que o atenuador de impacto atual feito com espuma, dessa forma, o ganho de massa considerando somente o atenuador de impacto é bastante reduzido. No entanto, uma possível vantagem no uso do atenuador em carbono consiste na montagem parafusada que permite o uso da mesma peça em projetos sucessivos ao contrário do atenuador atual que é fixado à estrutura por meio de adesivos.

Um outro problema que poderia ser minimizado com o uso da montagem parafusada é o alto custo associado ao material composto, o processo de fabricação e aquisição do material estão associados a um elevado custo que seria diluído ao longo dos anos ao utilizar a mesma peça em mais de um protótipo. As dimensões da base do atenuador de impacto em fibra de carbono são menores que a do atual atenuador em espuma o que permite uma possível redução das medidas do veículo, além disso, ao diminuir as dimensões do bulkhead frontal, ganha-se em relação à massa ao reduzir-se as dimensões da placa anti-intrusão e do tubo diagonal utilizado na triangularização do bulkhead. A título de comparação, a base atual possui 300 mm X 260 mm enquanto que o novo atenuador possuiria uma base de 290mm X 200mm.

Portanto, o uso do atenuador em fibra de carbono é interessante e pode trazer ganhos de projeto para o veículo.

## 6.2 Projetos Futuros

O primeiro projeto que deve ser feito é uma simulação completa de todo o grupo de componentes de proteção anti-impacto que inclui a chapa anti-intrusão e também os elementos em frente ao atenuador de impacto como o bico do veículo e as asas frontais. Uma vez que o uso da fibra de carbono mostrou-se eficiente do ponto de vista da massa mesmo levando-se em conta as simplificações do modelo, uma simulação completa levará a resultados mais precisos e possíveis reduções ainda maiores da massa total, uma vez que, os critérios de segurança podem considerar também as deformações do bulkhead dianteiro. Como toda simulação computacional, a validação dos resultados exige a realização de um teste físico e a formulação e realização de um teste dinâmico é uma continuação natural do projeto que precisa ser realizada.

Um outro ponto relevante é a validação das propriedades do material utilizado, alguns testes físicos simples como testes de tração e flexão podem ser feitos para validar as propriedades físicas do material já que os valores descritos pelo fabricante podem ser diferentes e dependem também do processo produtivo. Esse tipo de teste é necessário, por exemplo, para validar o valor do parâmetro  $\beta$  denominado fator de cisalhamento usado na definição do critério de flaha e que mede a influência da tração e compressão nas tensões de cisalhamento.

Finalmente, uma outra consideração que pode ser feita é considerar uma estrutura sanduíche com diferentes materiais, como, por exemplo, Kevlar, o que pode reduzir ainda mais a massa do conjunto de atenuação ao aumentar o comportamento elástico do componente. Como apresentado anteriormente, o uso exclusivo da fibra de carbono resulta em um comportamento frágil e propriedades elásticas maiores podem ser interessante do ponto de vista da absorção de energia. Porém, essa análise exige a caracterização do material que, atualmente, possui um custo elevado e de difícil acesso.

## Referências

- ASHBY, M. F. *Materials Selection in Mechanical Design*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, Elsevier Ltd, 2011.
- CONSTELLIUM. *Vehicle crash management systems*. 2017. Disponível em: <<http://www.constellium.com/aluminium-products/automotive-structures/automotive-system-solutions/vehicle-crash-management-systems>>, 28/09/2017.
- ENGINEERING, A. *Introduction to HyperMesh Desktop, Theory Manual*. [S.l.]: Altair Engineering, 2016.
- ENGINEERING, A. *Introduction to RADIOSS for Impact, Theory Manual*. [S.l.]: Altair Engineering, 2017.
- ENGINEERING, S. of A. *FSAE Rules*. [S.l.], 2017/2018.
- FORMULA SAE. 2017. Disponível em <[https://it.wikipedia.org/wiki/Formula\\_SAE](https://it.wikipedia.org/wiki/Formula_SAE)>, 26/04/2017.
- FSAE. *Standard Impact Attenuator Design*. 2017. Disponível em <<https://www.fsaeonline.com/page.aspx?pageid=193613e4-fff1-4ea9-97ec-eb1c07fbe3c0>>, 30/09/2017.
- JIANG XIANGHUA LIU, S. J. J. H. Z. Engineering solutions for manufacturing process. *Advanced Materials Research*, 2013.
- JR, W. D. C. *Materials Science and Engineering: an introduction*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 2007.
- MILLIKEN, D. L. M. W. F. *Race Car Vehicle Dynamics*. [S.l.]: Society of Automotive Engineers Inc, 1995.
- NORTON, R. L. *Machine Design, an integrated approach, 4th edition*. [S.l.]: Prentice Hall, 2011.
- NOUXE. *Crash Test*. 2017. Disponível em <[https://www.youtube.com/watch?v=\\_joy-q4h8oM](https://www.youtube.com/watch?v=_joy-q4h8oM)>, 30/09/2017.
- TORAY Carbon Fiber Composites. [S.l.: s.n.], 2017.